Alexandre Caboussat

Corrigé 1

Exercice 1

1.a) Les lignes, une fois complétées, sont les suivantes :

```
  p(i) = p(i) + f(j) * phi(j,n,x(i),t);
```

et

```
  basis = basis * (xx-t(k))/(t(j)-t(k));
```

1.b) Afin de vérifier numériquement que l'erreur converge, nous calculons l'erreur pour différentes valeurs de n. Nous prenons ici $n = \{4, 8, 16\}$. Le code suivant trace l'erreur en fonction du nombre de points d'interpolation, et la fig. 1 illustre le graphique correspondant. On observe que l'erreur décroit (et tend vers zéro) lorsque n augmente.

```
nn = [4, 8, 16];
err_n = zeros(length(nn),1);

for ii = 1:length(nn)
    [err,t,f,x,p]=intlag(nn(ii));
    err_n(ii) = err;
end

figure()
grid on
hold on
semilogy(nn, err_n, 'o-', 'Linewidth',4.75)
xlabel("n")
ylabel("err")
```

1.c) Lorsque $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$ et lorsque n augmente, on observe que l'interpolation de Lagrange avec points équidistants diverge (i.e. l'erreur augmente lorsque n augmente), comme illustré sur la fig. 2).

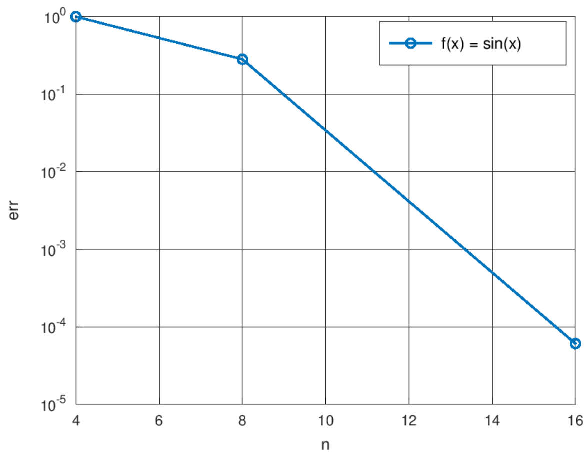

Figure 1: Cas $f(t) = \sin(2\pi t)$. Erreur absolue en fonction du nombre de points d'interpolation.

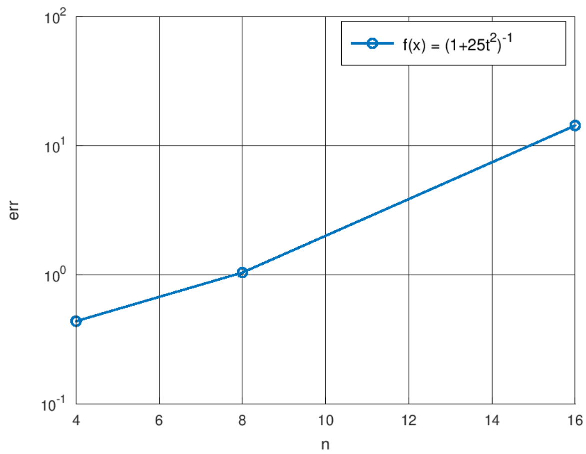

Figure 2: Cas $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$. Erreur absolue en fonction du nombre de points d'interpolation.

Exercice 2

2.a) Le graphique est représenté dans la fig. 3.

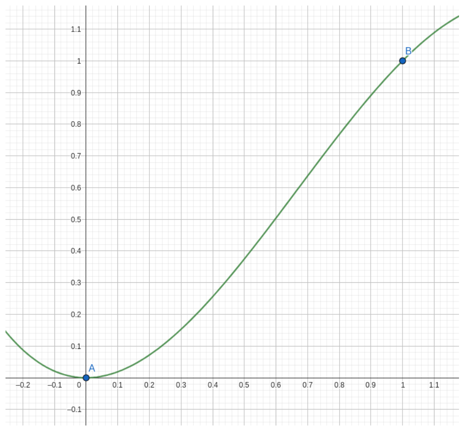

Figure 3: $p(t)$ vs t.

Remarque: Si on veut calculer de manière naïve ce polynôme, on pose $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et on impose:

$$\begin{cases} d & = 0, \\ a + b + c & = 1, \\ c & = 0, \\ 3a + 2b & = 1. \end{cases}$$

On obtient $p(t) = -t^3 + 2t^2$.

2.b) Les vérifications sont immédiates. Graphiquement, les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ sont illustrés sur la fig. 4.

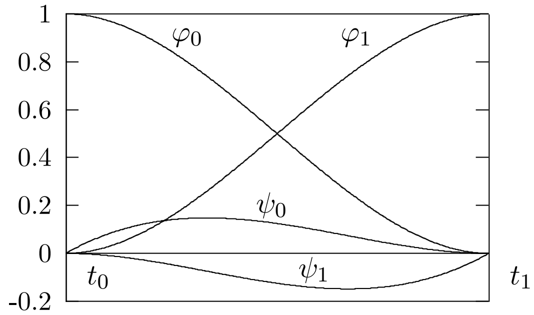

Figure 4: Base d'Hermite de type cubique associée à t_0 et t_1.

2.c) Les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ sont linéairement indépendants; en effet, considérons une combinaison linéaire nulle de ces quatre fonctions

$$q(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\psi_0(t) + \alpha_3\psi_1(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

et montrons que $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, 4$. En évaluant $q(t)$ en $t = t_0$ (resp. $t = t_1$) on obtient $\alpha_0 = 0$ (resp. $\alpha_1 = 0$). Puis en évaluant $q'(t)$ en $t = t_0$ et $t = t_1$, on conclut que $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$.

Une famille de quatre polynômes de degré 3 linéairement indépendants dans $\mathbb{P}_3$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ car cet espace est de dimension quatre.

2.d) On obtient :

$$\begin{aligned} p(t_0) &= p_0 \underbrace{\varphi_0(t_0)}_{=1} + p_1 \underbrace{\varphi_1(t_0)}_{=0} + p'_0 \underbrace{\psi_0(t_0)}_{=0} + p'_1 \underbrace{\psi_1(t_0)}_{=0} = p_0, \\ p'(t_0) &= p_0 \underbrace{\varphi'_0(t_0)}_{=0} + p_1 \underbrace{\varphi'_1(t_0)}_{=0} + p'_0 \underbrace{\psi'_0(t_0)}_{=1} + p'_1 \underbrace{\psi'_1(t_0)}_{=0} = p'_0, \end{aligned}$$

en utilisant le point **2.b**. De même, on évalue $p(t_1)$ et $p'(t_1)$ pour conclure que ce polynôme vérifie les relations au point **2.a**.

Le polynôme est donc :

$$p(t) = \varphi_1(t) + \psi_1(t) = t^2(2-t).$$

2.e) Considérons la base de Lagrange $(\phi_j)_{j=0}^3$ de $\mathbb{P}_3$ associée aux points $t_0, t_0+\varepsilon, t_1, t_1+\varepsilon$. En utilisant les résultats du cours on peut écrire:

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(t) &= p_\varepsilon(t_0)\phi_0(t) + p_\varepsilon(t_0+\varepsilon)\phi_1(t) + p_\varepsilon(t_1)\phi_2(t) + p_\varepsilon(t_1+\varepsilon)\phi_3(t) \\ &= \phi_2(t) + \phi_3(t)\ , \end{aligned}$$

avec

$$\phi_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_0-\varepsilon)(t-t_1-\varepsilon)}{(t_1-t_0)(t_1-t_0-\varepsilon)(-\varepsilon)} \qquad \text{et} \qquad \phi_3(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_0-\varepsilon)(t-t_1)}{(t_1+\epsilon-t_0)(t_1-t_0)\varepsilon}\ ,$$

d'où, en regroupant les fractions sur un dénominateur commun puis en factorisant le numérateur,

$$p_\varepsilon(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_0-\varepsilon)(-2t+3t_1-t_0+\varepsilon)}{(t_1-t_0)(t_1-t_0-\varepsilon)(t_1-t_0+\varepsilon)}.$$

2.f) Avec cette expression explicite de $p_\varepsilon(t)$, on peut calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(t) = \frac{(t-t_0)^2(-2t+3t_1-t_0)}{(t_1-t_0)^3} = \varphi_1(t).$$

Les trois autres fonctions de base de Hermite peuvent être obtenues par des procédés analogues. En effet, par exemple, la fonction de base ψ_1 s'obtient en posant, au point **2.e** ci-dessus,

$$p_\varepsilon(t_0) = 0, \qquad p_\varepsilon(t_0+\varepsilon) = 0, \qquad p_\varepsilon(t_1) = 0, \qquad p_\varepsilon(t_1+\varepsilon) = \varepsilon.$$

Les 2 dernières fonctions (φ_0 et ψ_0) de la base des polynômes de degré 3 pour l'interpolation de Hermite s'obtiennent alors par symétrie, en échangeant t_1 et t_0.