Corrigé 13

Exercice 1

1.a) Le fichier MATLAB **newmark.m** est complété de la manière suivante:

```
%
% condition initiale u0 et u1
%
for i = 1 : N
  u0(i) = w(i * h);
end
u1(1) = (1 - lambda) * u0(1) + lambda / 2 * u0(2);
for i = 2 : N - 1
  u1(i) = (1 - lambda) * u0(i) + lambda / 2 * (u0(i - 1) + u0(i + 1));
end
u1(N) = (1 - lambda) * u0(N) + lambda / 2 * u0(N - 1);
%
% schema de Newmark
%
t = tau;
for n = 2 : M
  t = t + tau;
  u2(1) = 2 * (1 - lambda) * u1(1) + lambda * u1(2) - u0(1);
    for i = 2 : N - 1
    u2(i) = 2 * (1 - lambda) * u1(i) + lambda * (u1(i - 1) + u1(i + 1)
   ) - u0(i);
  end
  u2(N)=2 * (1 - lambda) * u1(N) + lambda * u1(N - 1) - u0(N);
end
```

1.b) Lorsque $\tau = h$, le schéma devient $u_i^n = \frac{1}{2}(u_{i-n}^0 + u_{i+n}^0), \quad i = 1, \dots, N$; la solution est donc exacte dans ce cas.

1.c) On obtient les résultats suivants au temps $t = 0.2$:

$N+1$	h	τ	M	Erreur
20	0.05	0.04	5	2.566516e-01
40	0.025	0.02	10	1.155658e-01
80	0.0125	0.01	20	2.895243e-02
160	0.00625	0.005	40	7.411754e-03
320	0.003125	0.0025	80	1.814622e-03
640	0.0015625	0.00125	160	4.524545e-04

On note que, pour h et τ suffisamment petits, l'erreur est approximativement divisée par quatre lorsque h et τ sont divisés par deux. Le schéma est donc bien d'ordre $h^2 + \tau^2$.

1.d) Le schéma est stable sous la condition $\tau \leqslant h$, dans le cas contraire il produit à un moment ou un autre des valeurs $|u_j^n|$ qui augmentent indéfiniment lorsque n augmente.

Exercice 2

2.a) Etant donné les valeurs u_i^0 et u_i^1, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, le schéma obtenu en utilisant des formules de différences finies centrées en espace et en temps s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} - \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + x_i \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = 0, \\ i = 1, ..., N, \qquad n = 1, 2, ... \\ u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0. \end{array}\right.$$

2.b) On peut ecrire le schéma sous la forme

$$\left(1 + ih\frac{\tau}{2}\right) u_i^{n+1} = 2\left(1 - \frac{\tau^2}{h^2}\right) u_i^n + \frac{\tau^2}{h^2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) + \left(ih\frac{\tau}{2} - 1\right) u_i^{n-1}.$$

Les coefficients α, β et γ sont donc égaux à

$$\alpha_i = ih\frac{\tau}{2}, \quad \beta_i = 2\left(1 - \frac{\tau^2}{h^2}\right), \quad \gamma_i = \frac{\tau^2}{h^2}, \quad \delta_i = \left(ih\frac{\tau}{2} - 1\right).$$

2.c) u_i^0 est donné par les conditions de bord : $u_i^0 = \sin(2\pi ih)$. u_i^1 se calcule par un développement de Taylor à l'ordre 2 de u :

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, t_0) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_0) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_0) + o(\tau^3).$$

En utilisant les conditions de bord et en utilisant notre équation des ondes pour exprimer $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, on obtient :

$$u_i^1 = u_i^0 - 2\tau^2\pi^2 \sin(2\pi ih)$$