Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne | Alexandre Caboussat
Analyse numérique (GM) / MATH-251(e) | Printemps 2025

Corrigé 12

Exercice 1

1.a) Comme $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{dw}{dx}(x - c_0 t)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -c_0 \dfrac{dw}{dx}(x - c_0 t)$, $u(x,t)$ vérifie l'équation de transport. De plus on a bien $u(x,0) = w(x)$ et $u(0,t) = w(-c_0 t) = 0$ par définition de la fonction $w(x)$.

1.b) On pose $u_i^0 = w(x_i)$, $i = 0, ..., N+1$. Soit $n \geqslant 0$ fixé. Etant donné u_i^n, $i = 0, ..., N+1$, le problème discrétisé en temps et en espace par un schéma progressif décentré revient à chercher les u_i^{n+1}, $i = 0, ..., N+1$ tels que :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c_0 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0, \qquad i = 1, \dots, N+1,$$

avec $u_0^{n+1} = 0$. On peut encore écrire le schéma de manière explicite :

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{c_0 \tau}{h}\right) u_i^n + \frac{c_0 \tau}{h} u_{i-1}^n, \; i = 1, \dots, N+1. \tag{1}$$

1.c) Le fichier `transport.m` est complété de la manière suivante :

```
for n = 1 : M
  t = t + tau;
  unew(1) = uold(1) - (c * tau) / (h) * (uold(1)) ;
  for i = 2 : (N + 1)
    unew(i) = uold(i) - (c * tau) / (h) * (uold(i) - uold(i-1)) ;
  end
%
  for i = 1 : (N + 1)
    uold(i) = unew(i);
  end
end
```

1.d) On remarque que lorsque la condition CFL $\tau \leqslant \frac{h}{c_0}$, est violée, la solution présente des oscillations et finit par "exploser". Lorsque $\tau < \frac{h}{c_0}$, le schéma est stable, mais on remarque un effet de *diffusion* (la solution numérique est amortie). Lorsque $\tau = \frac{h}{c_0}$, le schéma devient $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$, $i = 1, \dots, N+1$; la solution est donc exacte dans ce cas!

1.e) On a les résultats suivants au temps $t = 0.8$:

$N+1$	h	τ	M	Erreur
20	0.05	0.08	10	2.359758e-01
40	0.025	0.04	20	1.853599e-01
80	0.0125	0.02	40	1.270456e-01
160	0.00625	0.01	80	8.128324e-02
320	0.003125	0.005	160	4.869991e-02
640	0.0015625	0.0025	320	2.752655e-02
1280	0.00078125	0.00125	640	1.484707e-02

On note que, pour h et τ suffisamment petits, l'erreur est approximativement divisée par deux lorsque h est divisé par deux et τ est divisé par deux. Le schéma est donc bien d'ordre $h+\tau$.

1.f) Soit $n \geqslant 0$ fixé. La relation (1) permet d'écrire pour $i = 1, \ldots, N+1$:

$$\begin{aligned} \left|u_i^{n+1}\right| &\leqslant \left|1 - \frac{c_0\tau}{h}\right| |u_i^n| + \left|\frac{c_0\tau}{h}\right| \left|u_{i-1}^n\right| \\ &\leqslant \left(\left|1 - \frac{c_0\tau}{h}\right| + \left|\frac{c_0\tau}{h}\right|\right) \max_{k=0,1,\ldots,N+1} |u_k^n|. \end{aligned}$$

Comme $1 - \frac{c_0\tau}{h} \geqslant 0$, on a $\left|1 - \frac{c_0\tau}{h}\right| + \left|\frac{c_0\tau}{h}\right| = 1$ et on obtient, pour $i = 1, \ldots, N+1$:

$$\left|u_i^{n+1}\right| \leqslant \max_{k=0,1,\ldots,N+1} |u_k^n|.$$

Pour $i = 0$, on a $u_0^{n+1} = 0$. Finalement :

$$\max_{i=0,1,\ldots,N+1} \left|u_i^{n+1}\right| \leqslant \max_{i=0,1,\ldots,N+1} |u_i^n|.$$

Exercice 2

2.a) On pose $u_i^0 = \sin(2\pi x_i)$, $i = 0, ..., N+1$. Soit $n \geqslant 0$ fixé. Etant donné u_i^n, $i = 0, ..., N+1$, le problème discrétisé en temps et en espace par un schéma rétrograde décentré revient à chercher u_i^{n+1}, $i = 0, ..., N+1$ tels que :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c_0 \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + (1 + x_i)\, u_i^{n+1} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N+1,$$

avec $u_0^{n+1} = 0$.

2.b) Le schéma peut s'écrire sous la forme $L\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$ avec:

$$L = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c_0\tau}{h} + \tau(1+x_i) & & & \\ -\frac{c_0\tau}{h} & 1 + \frac{c_0\tau}{h} + \tau(1+x_i) & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{c_0\tau}{h} & 1 + \frac{c_0\tau}{h} + \tau(1+x_i) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

3.a) En utilisant les développements de Taylor de $u(x_{i+1},t^n), u(x_{i-1},t^n), u(x_i,t^{n+1})$ autour de $u(x_i,t^n)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1},t^n) &= u(x_i,t^n) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3)\\
u(x_{i-1},t^n) &= u(x_i,t^n) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3)\\
u(x_i,t^{n+1}) &= u(x_i,t^n) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n) + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1},t^n) - u(x_{i-1},t^n) &= 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + O(h^3)\\
u(x_{i+1},t^n) + u(x_{i-1},t^n) &= 2u(x_i,t^n) + h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{u(x_{i+1},t^n) - u(x_{i-1},t^n)}{2h} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + O(h^2)\\
\frac{u(x_{i+1},t^n) + u(x_{i-1},t^n)}{2} &= u(x_i,t^n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire l'approximation du schéma en utilisant ces formules aux différences:

$$\begin{aligned}
&\frac{u(x_i,t^{n+1}) - \frac{u(x_{i+1},t^n)+u(x_{i-1},t^n)}{2}}{\tau} + c_0\frac{u(x_{i+1},t^n)-u(x_{i-1},t^n)}{2h}\\
&= \frac{u(x_i,t^{n+1}) - \left(u(x_i,t^n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3)\right)}{\tau} + c_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + O(h^2)\right)\\
&= \frac{\left(\tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n) + O(\tau^3)\right) - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3)}{\tau} + c_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + O(h^2)\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n) + O(\tau^2) + \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3/\tau) + c_0\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) + O(h^2)\\
&= \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n) + O(\tau^2) + \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n) + O(h^3/\tau) + O(h^2)
\end{aligned}$$

Donc, l'ordre de consistance du schéma est $O\left(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau}\right)$.