Exercice 2

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2e^{-y(t)} & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On note par u_n l'approximation de $y(t_n)$ au temps $t_n = nh$, h étant le pas de discretisation.

1. Ecrire les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Heun pour résoudre numériquement le problème donné.
2. En sachant que la solution exacte est $y(t) = \ln(e^2 + 2t)$, trouver les valeurs de h qui garantissent la stabilité du schéma d'Euler progressif.
3. En général, quel est l'ordre de convergence de la méthode de Heun ? Est-ce que cette méthode est stable ? Calculer l'approximation u_1 qu'on trouve par cette méthode.
4. Réécrire la méthode d'Euler rétrograde sous la forme

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}), \qquad \forall n \geq 0,$$

   où ϕ est une fonction convenable qui dépend aussi de u_n et de h. Montrer que la suite $\{u_n\}$ est croissante.
5. Afin de trouver l'inconnue u_{n+1} (étant donnés u_n et h), utiliser des itérations de point fixe avec ϕ comme fonction d'itération. Etablir une condition sur h suffisante à garantir que cette méthode de point fixe converge.

Exercice 2.

1) Soit $\cancel{n \in \mathbb{N}}$, $n = 0, 1, \dots, N_h - 1$ $t_n = t_0 + nh = nh$, $h > 0$ $T = 10$, $\frac{T}{h} = \frac{10}{h} = N_h$

Euler progressif : $\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \\ u_0 = y(t_0) \end{cases}$ ici $f(t, y) = 2e^{-y}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h2e^{-u_n} & n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Euler retrograde : $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) = 2e^{-u_{n+1}}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h2e^{-u_{n+1}} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$ (implicite) $n = 0, 1, \dots, N_h - 1$

Heun : $$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \underbrace{u_n + h f(t_n, u_n)}_{\text{"EP"}}) \right]$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}h\left[2e^{-u_n} + 2e^{-(u_n + h2e^{-u_n})}\right]$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2he^{-u_n}\left[1 + e^{-h2e^{-u_n}}\right] & n = 0,1,2,\dots N_h - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

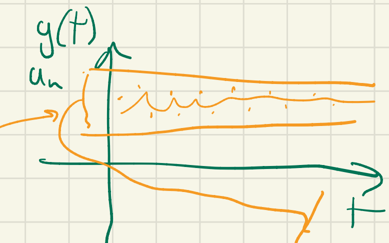
2) Stabilité : $h < \frac{2}{\lambda_{max}}$ pour autant que $\frac{\partial f}{\partial y} \in [-\lambda_{max}, -\lambda_{min}]$

avec $\lambda_{max} < \infty$, $\lambda_{min} > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{-2e^{-y}} \quad , \quad y(t) = \ln(e^2 + 2t)$$

$$-2e^{-y} \in [-\infty, 0)$$

$y \in D_y$



On suppose que u_n ne sera pas loin de $y(t)$. On ne regarde que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur la trajectoire de $y(t)$. $y(t) \in [\underbrace{\ln(e^2)}_{2}, \ln(e^2+20)]$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) \in \Big[\overbrace{-2e^{-2}}^{\lambda_{max}} ; \overbrace{-2e^{-(\ln(e^2+20))}}^{\lambda_{min}}\Big] \qquad \lambda_{min} = 2e^{-(\ln(e^2+20))}, \quad \lambda_{max} = 2e^{-2}$$

$$h < \frac{2}{\lambda_{max}} = \frac{2}{2e^{-2}} = e^2$$

La méthode est stable si $h < e^2$ (pour autant que u_n reste dans l'intervalle $[2, \ln(e^2+20)]$).

3. Heun converge à l'ordre 2 et c'est une méthode conditionnellement stable.

$$u_1 = 2 + 2he^{-2}\left(1 + e^{-2he^{-2}}\right)$$

4. $u_{n+1} = u_n + \underbrace{2h\underbrace{e^{-u_{n+1}}}_{>0}}_{>0}$ $\quad \phi(x) = u_n + 2h\, e^{-x}$ dépend de h et u_n.

$u_{n+1} = u_n + {>0} > u_n \implies u_{n+1} > u_n$ pour tout n,

$\{u_n\}_{n=0,\dots,N_h}$ est croissante.

5) $\phi'(x) = -h2e^{-x}$ (un croissante)

$|\phi'(x)| = h2e^{-x} < 1 \quad \forall x \in [u_n, \infty)$

$h < \frac{1}{2}e^{x} \quad \forall x > u_n$

$\Rightarrow h < \frac{1}{2}e^{u_n}$

on a $u_0 = 2$, $u_n \geq 2 \Rightarrow h < \frac{1}{2}e^{2}$

(On remarque que dans cette situation, on a un h qui doit être plus petit que la condition de stabilité pour EP)

(Cette méthode avec $\phi(x) = u_n + h2e^{-x}$ n'est pas convenable dans cette situation)