Analyse Numériques SV

Equations différentielles ordinaires
Turning Point, session: pilote
http://responseware.eu/

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2020

Theorem (de Cauchy-Lipschitz, proposition 7.1 du livre)

Si la fonction $f(t, y)$ est

1. *continue par rapport à ses deux variables ;*
2. *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive L (appelée constante de Lipschitz) telle que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ \forall t \in I, \tag{7}$$

Alors la solution $y = y(t)$ du problème de Cauchy (3) existe, est unique et appartient à $C^1(I)$.

MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES

pour l'approximation du problème de Cauchy (Sec. 7.2 du livre)

Soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ une suite de nombres réels équirépartis et $h = t_{n+1} - t_n$ le pas de temps. On notera par :

$$u_n \quad \text{une approximation de} \quad y(t_n).$$

Dans le problème de Cauchy (3), pour $t = t_n$, on a

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)).$$

On veut alors approcher la dérivée $y'(t_n)$ au point t_n. Cela se fait en utilisant des schémas de **dérivation numérique**.

Schéma d'Euler explicite ou progressif

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_n, u_n) \qquad \text{pour } \; n = 0, 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{array}\right. \tag{12}$$

Schéma d'Euler implicite ou rétrograde

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \qquad \text{pour } \; n = 0, 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{array}\right. \tag{13}$$

La méthode de Heun :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dfrac{1}{2}\Big[f(t_n, u_n) + f\Big(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)\Big)\Big] & \text{pour } n = 0, 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{14}$$

Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dfrac{1}{2}\Big[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\Big] & \text{pour } n = 0, 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases} \tag{15}$$

Remarque

- *Le schéma d'Euler progressif est un schéma explicite car il permet de calculer* u_{n+1} *en fonction de* u_n *explicitement :*

$$\text{(EP)} \qquad u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n).$$

- *Le schéma d'Euler rétrograde est un schéma implicite car* u_{n+1} *est définit implicitement en fonction de* u_n *:*

$$\text{(ER)} \qquad u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

En général, pour le schéma d'Euler rétrograde, il faut résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps.
Méthode du point fixe : Notons que (ER) est équivalent à un problème de point fixe avec

$$u_{n+\mathbf{1}} = \phi(u_{n+\mathbf{1}}) = u_n + hf(t_{n+\mathbf{1}}, u_{n+\mathbf{1}}) \tag{18}$$

On peut résoudre ce problème grâce aux itérations suivantes

$$u_{n+\mathbf{1}}^{k+\mathbf{1}} = \phi(u_{n+\mathbf{1}}^{k}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Méthode de Newton : A partir de l'équation :

$$F(u_{n+\mathbf{1}}) \equiv u_{n+\mathbf{1}} - \phi(u_{n+\mathbf{1}}) = 0, \tag{20}$$

on utilise les itérations suivantes :

$$u_{n+\mathbf{1}}^{k+\mathbf{1}} = u_{n+\mathbf{1}}^{k} - \frac{F(u_{n+\mathbf{1}}^{k})}{F'(u_{n+\mathbf{1}}^{k})} = u_{n+\mathbf{1}}^{k} - \frac{F(u_{n+\mathbf{1}}^{k})}{\mathbf{1} - \phi'(u_{n+\mathbf{1}}^{k})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Dans les deux cas, on a $\lim_{k\to\infty} u_{n+\mathbf{1}}^{k} = u_{n+\mathbf{1}}$.

Quelles méthodes sont implicites ?

- A Euler Progressive $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_n, u_n)$
- B Euler Retrograde $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$
- C Heun $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2}\Big[f(t_n, u_n) + f\Big(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)\Big)\Big]$
- D Crank Nicolson $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2}\Big[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\Big]$
- E Point miliux $\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n)$
- F BDF 2 $\frac{3f(x_{n+1})-4f(x_n)+f(x_{n+1})}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$

Conditions de stabilité

Le choix du pas de temps h n'est pas arbitraire. Pour la méthode d'Euler progressive, on verra plus loin dans le cours que, si h n'est pas suffisamment petit, des problèmes de stabilité peuvent surgir.

Par exemple, si l'on considère le problème

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) & \text{pour } \; t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{23}$$

dont la solution est

$$y(t) = e^{-2t},$$

on peut observer que les comportements par rapport à h des méthodes d'Euler progressive et rétrograde sont très différents.

La propriété de stabilité (absolue)

Pour $\lambda < 0$ donné, on considère le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{24}$$

dont la solution est

$$y(t) = e^{\lambda t}. \qquad \text{En particulier,} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Posons $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ tels que $t_n = nh$, où le *pas de temps* $h > 0$ est donné.

Un schéma de résolution associé à ce problème est appelé **absolument stable** si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

- Pour le schéma d'**Euler progressif** :

$$u_{n+1} = (1+\lambda h)u_n, \qquad \text{d'où} \qquad u_n = (1+\lambda h)^n, \quad \forall n \geq 0. \tag{25}$$

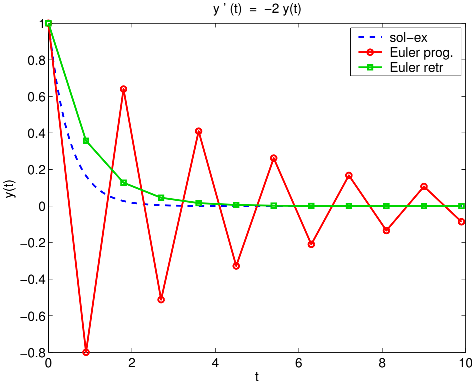
Si $1+\lambda h < -1$, alors $|u_n| \to \infty$ quand $n \to \infty$, donc le schéma d'Euler progressif est *instable*.
Pour assurer la stabilité, on a besoin de *limiter le pas de temps h*, en imposant la **condition de stabilité** :

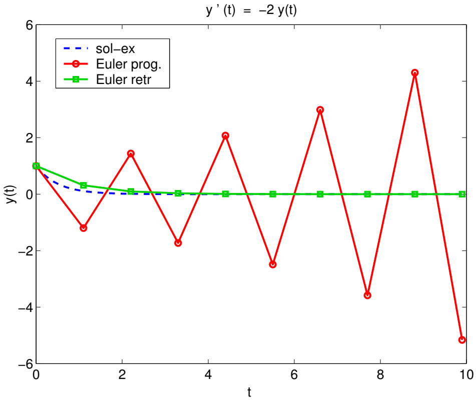
$$\boxed{|1+\lambda h| < 1 \text{ d'où } h < 2/|\lambda|.}$$

- Pour le schéma d'**Euler rétrograde** :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right) u_n \qquad \text{et donc} \qquad u_n = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Et comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, on a la stabilité sans condition sur h.





Comparaison entre les solutions obtenues par les méthodes d'Euler progressive et rétrograde pour $h = 0.9$ (à gauche, stable) et $h = 1.1$ (à droite, instable) (condition de stabilité pour Euler progressif : $|\lambda| = 2 \Rightarrow h < 2/|\lambda| = 1$).

La stab. abs. contrôle les perturbations

Pour un problème général, on se pose la question de sa stabilité, c'est-à-dire de la propriété selon laquelle des petites perturbations sur les données induisent des “petites” perturbations sur la solution.

On veut montrer la propriété suivante.

Une méthode numérique absolument stable pour le problème modèle est stable (au sens précédent) pour un problème de Cauchy quelconque.

Remarque

Reprenons le problème modèle généralisé

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t) + r(t), \quad t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{33}$$

Dans la méthode d'Euler Progressive, on peut contrôler les perturbations dans le cas où il existe $\lambda_{\min} > 0$ *et* $\lambda_{\max} < \infty$ *tels que*

$$-\lambda_{max} \leq \lambda(t) \leq -\lambda_{min}, \forall t \geq t_0 \tag{34}$$

et si on choisi $0 < h < 2/\lambda_{max}$.

REMARQUE

On considère maintenant le problème de Cauchy général

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \ , \end{cases}$$

dans un intervalle non-borné.
Soit D_y *l'ensemble qui contient la trajectoire de* $y(t)$ *ainsi que celle de* u_n.
Dans la méthode d'Euler Progressive, on peut étendre le contrôle des perturbations au problème modèle généralisé (33), dans le cas où il existe $\lambda_{\min} > 0$ *et* $\lambda_{\max} < \infty$ *tels que*

$$-\lambda_{max} \leq \partial f / \partial y(t, y) \leq -\lambda_{min}, \forall t \geq 0, \ \forall y \in D_y, \tag{35}$$

et si on choisi $0 < h < 2/\lambda_{max}$.

Exemple

Example

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (-2 + sin(t))y(t) + e^{-3t}, \quad t \in (0, +\infty), \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Ecrivez les Schemas d'Euleur Progressif et Retrograde pour ce problème de Cauchy. Ensuite calculez

- $\lambda(t)$
- $\lambda_{\text{min}}, \lambda_{\text{max}}$
- La condition de stabitité pour Euler Progressive et Retrograde

Convergence

Definition

Soit $y(t)$ la solution du problème de Cauchy (3) sur l'intervalle $[0, T]$; soit u_n une solution approchée au temps $t_n = nh$ trouvée par une méthode numérique donnée, où $h = T/N_h$ ($N_h \in \mathbb{N}$) est le pas de temps. La méthode est dite *convergente* si

$$\forall n = 0, \ldots, N_h : \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

où $C(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Si, en plus, il existe $p > 0$ tel que $C(h) = Kh^p$ pour une constante K qui ne dépend pas de h ni de n, on dit que la méthode est *convergente d'ordre p*.

Dans la suite du cours, on va analyser la convergence et l'ordre de la méthode d'Euler progressive.

Convergence d'Euler progressif

Theorem

Si $y \in \mathcal{C}^2([0,T])$ *et* f *satisfait* $-\infty < -\lambda_{max} \leq \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \leq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$. *alors la méthode d'Euler progressive est convergente et*

$$\forall n \geq 0, \ \ |y(t_n) - u_n| \leq c(t_n)h, \qquad \text{où } c(t_n) = t_n \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, t_n]} |y''(t)|, \tag{37}$$

En particulier, la méthode est convergente d'ordre $p = 1$, *avec*

$$C(h) = c(T)h.$$

Remarque

Le même type de résultat peut être établi pour la méthode d'Euler rétrograde.

Evolution des populations de lapins et de renards sur 10 ans.