Analyse Numériques SV

Equations non-linéaires

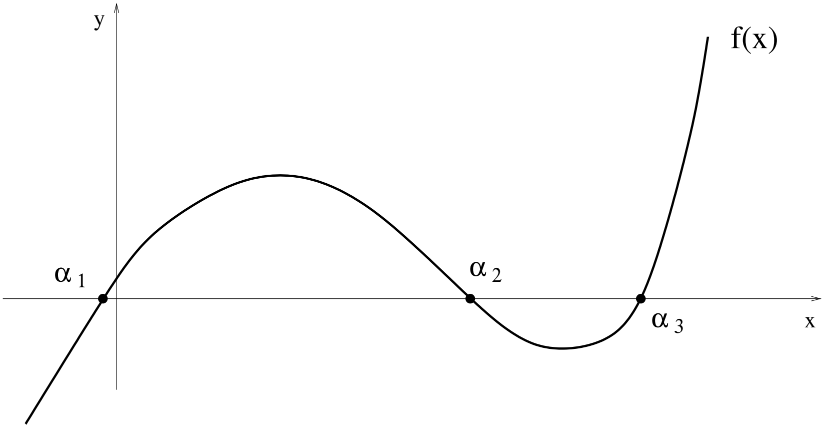
Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2020

Equations non linéaires

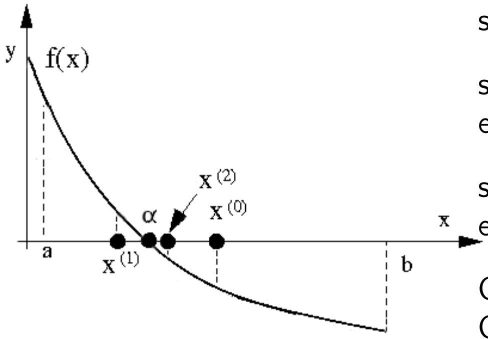
Objectif : trouver les zéros de fonctions (ou systèmes) non linéaires, c-à-d les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $f(\alpha) = 0$.



Méthode de dichotomie ou bissection I

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'elle change de signe entre a et b, i.e., $f(a)f(b) < 0$. Puisque f est continue, il existe un zéro ou racine $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La méthode dichotomie construit, à partir d'un essai initial $x^{(0)}$ une suite $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, telle que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$.



on pose $x^{(0)} = \frac{a+b}{2}$ (point milieu),

si $f(x^{(0)}) = 0$, alors $\alpha = x^{(0)}$

si $f(x^{(0)})f(a)) < 0 \Rightarrow$ le zéro $\alpha \in [a, x^{(0)}]$ et on définit $a^{(1)} = a$ et $b^{(1)} = x^{(0)}$

si $f(x^{(0)})f(b)) < 0 \Rightarrow$ le zéro $\alpha \in [x^{(0)}, b]$ et on définit $a^{(1)} = x^{(0)}$ et $b^{(1)} = b$

On vois bien que $|x^{(0)} - \alpha| < \frac{b-a}{2}$.
On recommence avec $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ et on aura

Algorithme de bissection

On pose $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$. Pour $k = 0, 1, \ldots$

1. $x^{(k)} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$
2. si $f(x^{(k)}) = 0$, alors $x^{(k)}$ est le zéro cherché. Autrement :
   1. soit $f(x^{(k)})f(a^{(k)}) < k \Rightarrow$ et le zéro $\alpha \in [a^{(k)}, x^{(k)}]$.
      On pose $a^{(k+1)} = a^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = x^{(k)}$
   2. soit $f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < k \Rightarrow$ le et zéro $\alpha \in [x^{(k)}, b^{(k)}]$.
      On pose $a^{(k+1)} = x^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = b^{(k)}$

Le point $x^{(k)}$ se trouve au milieu de l'intervalle $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, dont la longuer est $\frac{b-a}{2^k}$. Donc on a l'estimation suivante pour l'erreur d'approximation :

$$\boxed{|e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}},}$$

Si on désire une erreur plus petit d'une tolerance $tol > 0$ donnée, en générale combien d'iteration faudra-t-il faire ? (réponse : $\log_2\left(\frac{b-a}{tol}\right) - 1$)

Méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Soit $x^{(0)}$ un point donné. On considère l'équation de la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ et qui a comme pente $f'(x^{(k)})$:

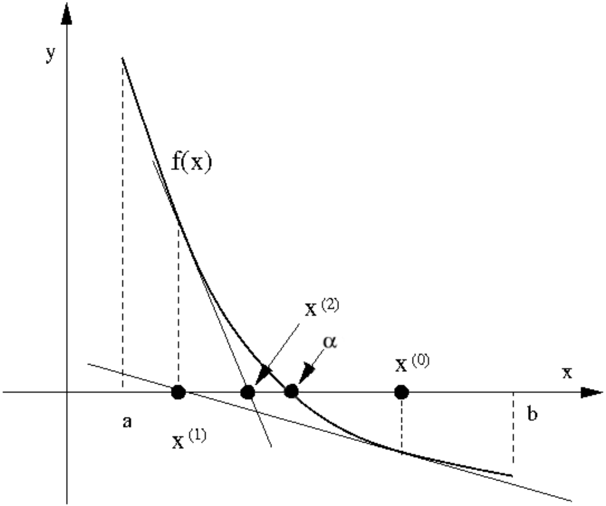
$$y(x) = f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + f(x^{(k)}).$$

On définit $x^{(k+1)}$ comme étant le point où cette droite intersecte l'axe x, c'est-à-dire $y(x^{(k+1)}) = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.} \tag{3}$$

Méthode de Newton

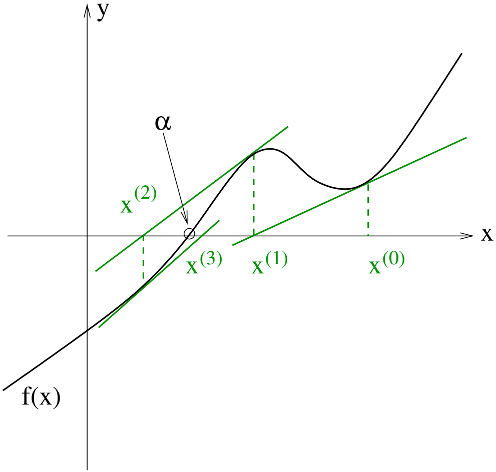
En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le zéro de f

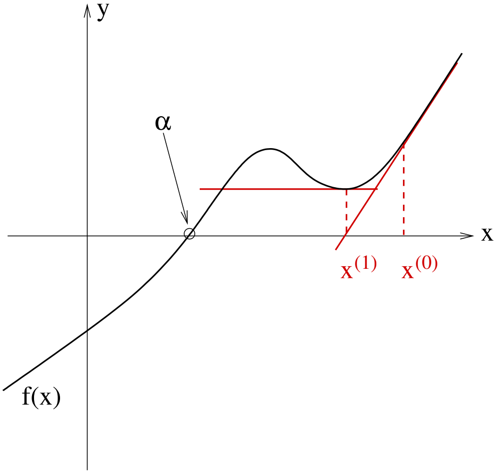


Convergence ?

Est-ce que cette méthode converge ?

- Cela dépend des propriétés de la fonction ;
- Cela dépend du point initial.





Méthode de point fixe

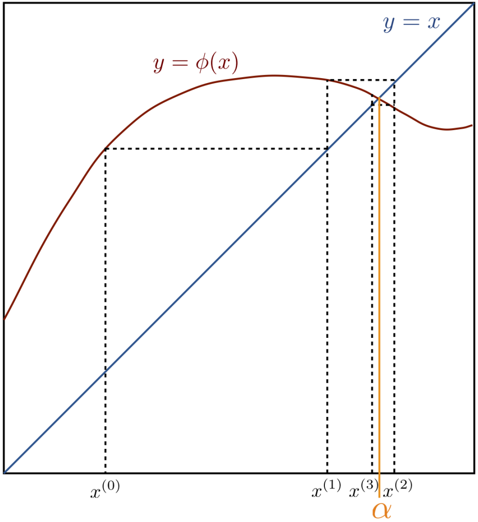
Un procédé général pour trouver les racines d'une équation non linéaire $f(x) = 0$ consiste à la transformer en un problème équivalent $x - \phi(x) = 0$, où la fonction auxiliaire $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ doit avoir la propriété suivante :

$$\phi(\alpha) = \alpha \qquad \text{si et seulement si} \qquad f(\alpha) = 0.$$

Le point α est dit alors *point fixe* de la fonction ϕ. Approcher les zéros de f se ramène donc au problème de la détermination des *points fixes* de ϕ.

Idée : On va construire des suites qui vérifient $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$. En effet, si $x^{(k)} \to \alpha$ et si ϕ est continue dans $[a, b]$, alors la limite α satisfait $\phi(\alpha) = \alpha$.

En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le point fixe α



Proposition

(Convergence globale)

1. Supposons que $\phi(x)$ est continue sur $[a, b]$ et telle que $\phi(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors il existe au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$ de ϕ.

2. De plus, si $\exists L < 1$ tel que $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$,

alors ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$ et la suite définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$, converge vers α pour toute donnée initiale $x^{(0)}$ dans $[a, b]$.

Démonstration

1. La fonction $g(x) = \phi(x) - x$ est continue sur $[a, b]$ et, par l'hypothèse sur l'image de ϕ, on a que $g(a) = \phi(a) - a \geq 0$ et $g(b) = \phi(b) - b \leq 0$. On sait alors qu'il existe au moins un zéro de g dans l'intervalle $[a, b]$, donc il existe au moins un point fixe de ϕ dans $[a, b]$.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$ deux points fixes différents. On a donc que

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|,$$

ce qui est absurde. Il existe donc un unique point fixe α de ϕ dans $[a, b]$.

Soient $x^{(0)} \in [a, b]$ et $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$. On a que

$$0 \leq |x^{(k+1)} - \alpha| = |\phi(x^{(k)}) - \phi(\alpha)| \leq L|x^{(k)} - \alpha| \leq \dots \leq L^{k+1}|x^{(0)} - \alpha|,$$

c.-à-d.

$$\frac{|x^{(k)} - \alpha|}{|x^{(0)} - \alpha|} \leq L^k.$$

Puisque $L < 1$, pour $k \to \infty$, on a que

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - \alpha| \leq \lim_{k\to\infty} L^k = 0.$$

Donc, $\forall x^{(0)} \in [a, b]$, la suite $\{x^{(k)}\}$ définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$ converge vers α lorsque $k \to \infty$.

Remarque

Si $\phi(x)$ *est différentiable sur* $[a, b]$ *et*

$\exists K < 1$ *tel que* $|\phi'(x)| \leq K \ \forall x \in [a, b]$,

alors la condition 2 de la proposition (1) *est vérifiée. Cette hypothèse est plus forte, mais elle est plus souvent utilisée en pratique car elle est plus aisée à vérifier.*

Definition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \to \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid .}$$

S'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid^2}$$

soit vérifiée, on dit que la convergence est quadratique.
En général, la convergence est d'ordre p, $p \geq 1$, s'il existe une constante $C > 0$ (avec $C < 1$ lorsque $p = 1$) telle que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid^p .$$

Proposition

(Convergence locale)
Soient ϕ une fonction continue et différentiable sur $[a, b]$ et α un point fixe de ϕ. Si $|\ \phi'(\alpha)\ | < 1$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x^{(0)}$, $|\ x^{(0)} - \alpha\ | \leq \delta$, la suite $\{x^{(k)}\}$ définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ converge vers α lorsque $k \to \infty$.
De plus, on a

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha).}$$

On remarque que, si $0 < |\ \phi'(\alpha)\ | < 1$, alors pour n'importe quelle constante C telle que $|\phi'(\alpha)| < C < 1$, si k est suffisamment grand, on a :

$$|\ x^{(k+1)} - \alpha\ | \leq C\ |\ x^{(k)} - \alpha\ |\ .$$

Proposition

Soient ϕ une fonction deux fois différentiable sur $[a, b]$ et α un point fixe de ϕ. On considère $x^{(0)}$ dans l'ensemble du convergence locale. Si $\phi'(\alpha) = 0$ et $\phi''(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération ϕ est d'ordre 2 et

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{\phi''(\alpha)}{2}.}$$

Démonstration

Un développement de Taylor de ϕ en $x = \alpha$ donne

$$x^{(k+1)} - \alpha = \phi(x^{(k)}) - \phi(\alpha) = \phi'(\alpha)(x^{(k)} - \alpha) + \frac{\phi''(\eta)}{2}(x^{(k)} - \alpha)^2$$

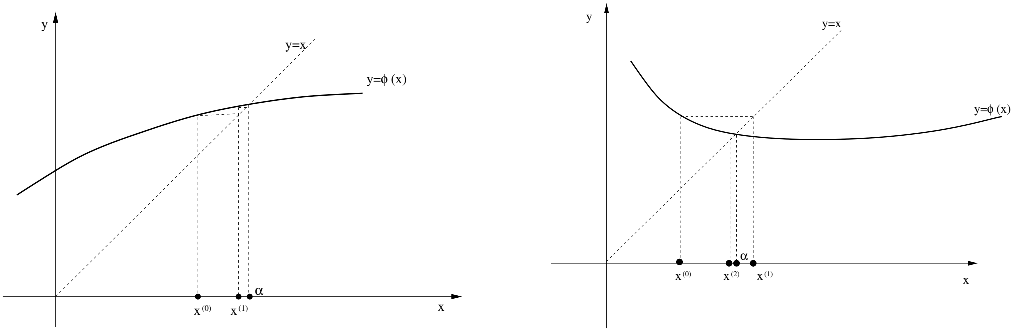
où η est entre $x^{(k)}$ et α. Ainsi, on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\phi''(\eta)}{2} = \frac{\phi''(\alpha)}{2}.$$

Quelques exemples sur comment la valeur de $\mid \phi'(\alpha) \mid$ influence la convergence.

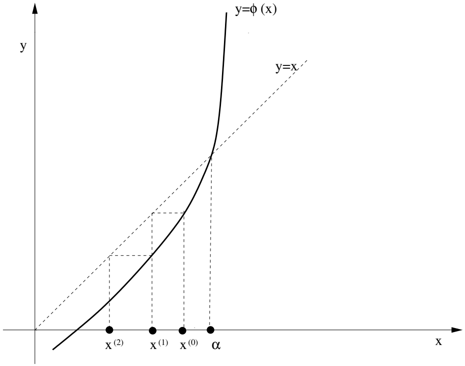
Cas **convergents** :

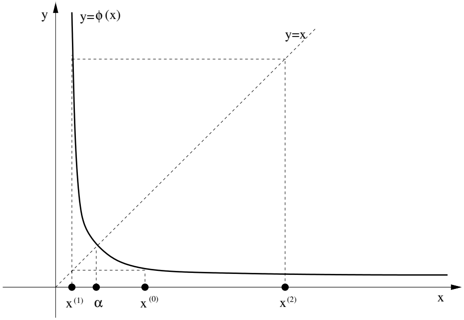
$$0 < \phi'(\alpha) < 1, \qquad -1 < \phi'(\alpha) < 0.$$



Cas **divergents** :

$$\phi'(\alpha) > 1, \qquad \phi'(\alpha) < -1.$$





A propos de la méthode de Newton

La méthode de Newton constitue une méthode de point fixe : $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ pour la fonction

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Soit α un zéro de la fonction f, c.-à-d. tel que $f(\alpha) = 0$. On remarque que $\phi'(\alpha) = 0$, lorsque $f'(\alpha) \neq 0$. En effet,

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

THEOREM

Si f est deux fois différentiable, $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que, si $\mid x^{(0)} - \alpha \mid \leq \delta$, la suite définie par la méthode de Newton converge vers α. De plus, la convergence est quadratique ; plus précisément

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\,.}$$

Démonstration

La propriété de la convergence vient de la Proposition 2, tandis que la convergence quadratique est une conséquence de la Proposition 3, du fait que $\phi'(\alpha) = 0$ *et que* $\frac{\phi''(\alpha)}{2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

DEFINITION

On dit q'un zéro α de f est de multiplicité m, $m \in \mathbb{N}$ si
$f(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad$ et $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
Un zéro de multiplicité $m = 1$ est appelé zéro simple.

Remarque

Si $f'(\alpha) = 0$, la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire, pas quadratique. On considère alors la méthode de Newton modifiée :

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.} \tag{7}$$

avec m la multiplicité de α.

Si la multiplicité m de α n'est pas connue, il y a d'autres méthodes, *des méthodes adaptatives*, qui permettent de récupérer l'ordre quadratique de la convergence.

Un critère d'arrêt pour Newton

Quand faut-il arrêter les itérations de l'algorithme de Newton ? Un bon critère d'arrêt est le **contrôle de l'incrément** : les itérations s'achèvent dès que

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon \tag{8}$$

où ϵ est une tolérance fixée.

En fait, si on note $e^{(k)} = \alpha - x^{(k)}$ l'erreur à l'itération k, on a

$$e^{(k+1)} = \alpha - x^{(k+1)} = \phi(\alpha) - \phi(x^{(k)}) = \phi'(\xi^{(k)})e^{(k)},$$

avec $\xi^{(k)}$ entre $x^{(k)}$ et α, et

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \alpha - x^{(k)} - \alpha + x^{(k+1)} = e^{(k)} - e^{(k+1)} = \left(1 - \phi'(\xi^{(k)})\right) e^{(k)}. \quad (9)$$

En supposant que, si k est suffisamment grand, on a $\phi'(\xi^{(k)}) \approx \phi'(\alpha)$ et en sachant que pour la méthode de Newton $\phi'(\alpha) = 0$ si α est un zéro simple, on trouve l'estimation

$$|e^{(k)}| \approx |x^{(k+1)} - x^{(k)}|.$$

L'erreur qu'on commet lorsqu'on adopte le critère (8) est donc plus petite que la tolérance fixée.

Critères d'arrêt : le cas general

En général, pour toutes les méthodes étudiées, on peut utiliser deux critères d'arrêt différents : les itérations s'achèvent dès que

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon \qquad \text{(contrôle de l'incrément)},$$

ou

$$|f(x^{(k)})| < \epsilon \qquad \text{(contrôle du résidu)},$$

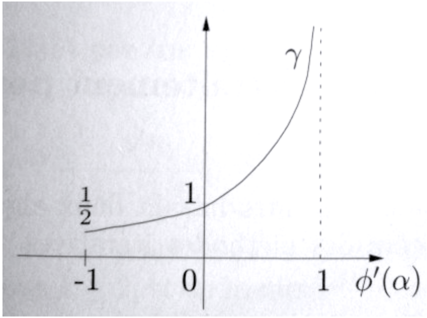
où ϵ est une tolérance fixée.

Pour le critère qui contrôle l'incrément on a obtenu l'estimation (9) :

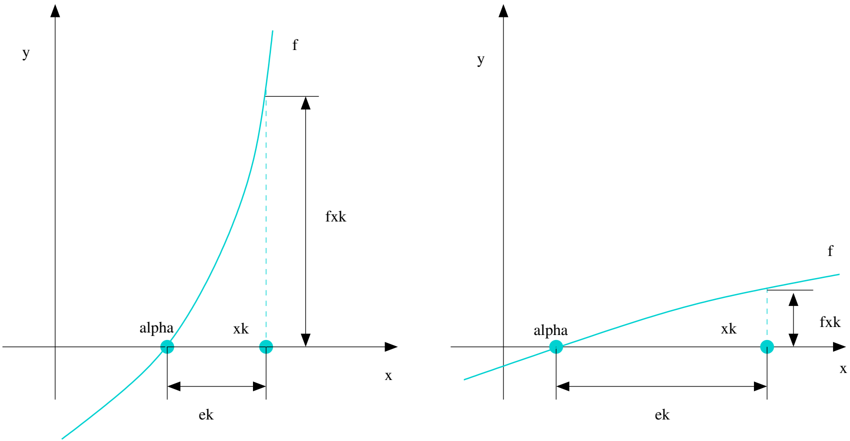
$$e^{(k)} \approx \frac{1}{(1-\phi'(\alpha))}(x^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

Si l'on trace un graphe du comportement de la fonction $\gamma(y) = \frac{1}{1-y}$ pour $y = \phi\prime(\alpha)$ on peut conclure que le test :

- n'est pas satisfaint si $\phi\prime(\alpha)$ est proche de 1,
- est optimal pour les métohdes d'ordre 2 pour lesquelles $\phi\prime(\alpha) = 0$,
- est encore satisfaisant si $-1 < \phi\prime(\alpha) < 0$.



Par contre, le deuxième critère (contrôle du résidu) est satisfaisant seulement lorsque $|f'| \simeq 1$ dans un voisinage de la racine α. Sinon, il est soit trop restrictif (si $|f'| \gg 1$) soit trop faible (si $|f'| \ll 1$) :



Deux cas où le résidu est un mauvais estimateur de l'erreur : $|f'(x)| \gg 1$ (à gauche), $|f'(x)| \ll 1$ (à droite) avec x dans un voisinage de α