Analyse Numériques SV

Intégration numérique

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2020

Formules d'intégration *simples*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On se propose de calculer numériquement la quantité

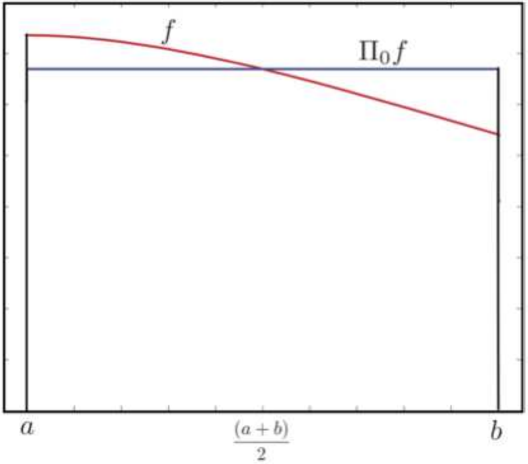
$$\int_a^b f(x)dx.$$

On considère les formules d'intégration suivantes (dites *simples*):

- Formule du point milieu
- Formule du trapèze
- Formule de Simpson

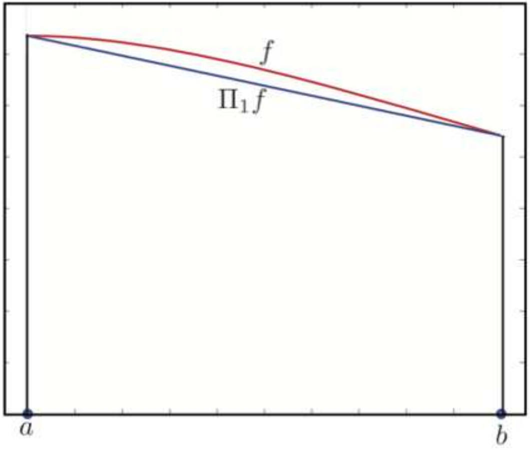
Formule du point milieu

$$J^{pm}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{1}$$



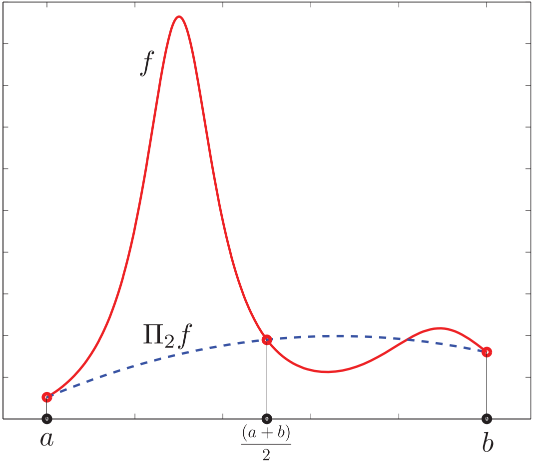
Formule du trapèze

$$\boxed{J^t(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}} \tag{2}$$



Formule de Simpson

$$J^s(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \tag{3}$$



En général, on définit

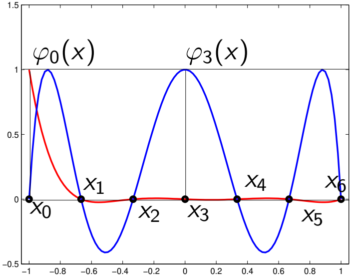
$$J(g) = \int_{-1}^{1} \Pi_n g(t)dt \approx \int_{-1}^{1} g(t)dt,$$

où $\Pi_n g$ est le polynôme d'interpolation de g de degré $n = M-1$ aux noeuds $t_1, \ldots, t_M$:

$$J(g) = \int_{-1}^{1} \Pi_n g(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{M} g(t_j)\varphi_j(x)dx = \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\left[\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt\right]}_{\omega_k} g(t_j)$$

φ_j, pour $j = 1, \cdots, M$, est le j-ième polynôme caractéristique de Lagrange.

$$\varphi_k \in \mathbb{P}_n : \varphi_k(x_j) = \delta_{jk}, \quad k, j = 0, \cdots, n$$



On a la formule générale suivante:

$$\boxed{J(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k),} \tag{4}$$

où x_k sont les noeuds de la formule de quadrature et ω_k sont les poids (voir la table suivante).

Formule	x_k	ω_k
Point milieu (1)	$x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$	$\omega_0 = b - a$
Trapèze (2)	$x_0 = a,\ x_1 = b$	$\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}(b-a)$
Simpson (3)	$x_0 = a,\ x_1 = \frac{1}{2}(a+b),$	$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}(b-a),$
	$x_2 = b$	$\omega_1 = \frac{2}{3}(b-a)$

En ce qui concerne l'erreur d'intégration, on a

$$\begin{aligned}
|I(f) - J(f)| &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \Pi_n f(x)dx \right| \\
&= \left| \int_a^b (f - \Pi_n f)(x)dx \right| \\
&\leq \underbrace{\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|}_{\text{erreur d'interpolation}} (b-a)
\end{aligned}$$

Augmenter n n'est donc pas une bonne stratégie pour réduire l'erreur d'intégration $|I(f) - J(f)|$.

Formules d'intégration *composites*

On va considérer les N sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, N$, où $x_k = a + kH$ et $H = (b-a)/N$. Comme on a

$$I(f) = \sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} f(x)dx,$$

on peut calculer une approximation de l'intégrale exacte de f sur chaque sous-intervalle I_k par l'intégrale d'un polynôme approchant f sur I_k, c.à.d.:

$$I(f) \text{ approchée par } \sum_{k=0}^{N-1} \int_{I_k} \Pi_n f(x)dx = \int_a^b \Pi_n^H f(x)dx.$$

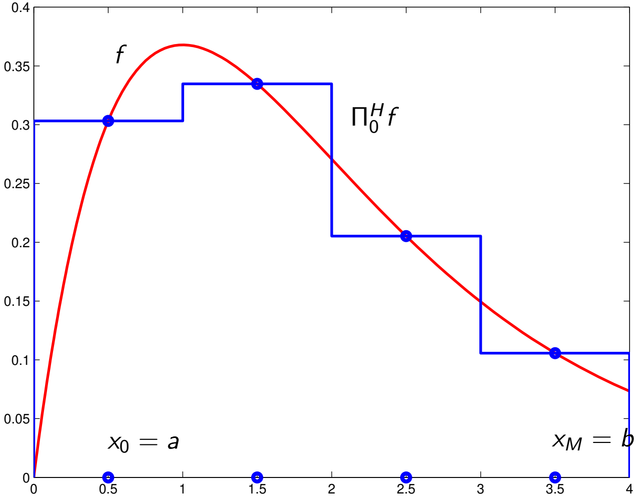
1. Formule composite du point milieu

Cette formule est obtenue en remplaçant, sur chaque sous-intervalle I_k, la fonction f par un polynôme constant $\Pi_0 f$ égal à la valeur de f au milieu de I_k (voir figure suivante) : on obtient la *formule composite du point milieu*

$$\boxed{I_{pm}^c(f) = H \sum_{k=1}^{N} f(\overline{x}_k),} \tag{5}$$

où

$$\overline{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

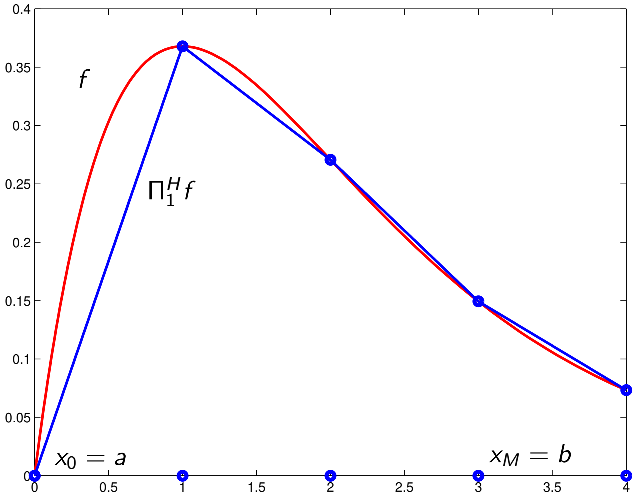


0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
f
$\Pi_0^H f$
$x_0 = a$
$x_M = b$

2. La formule composite du trapèze

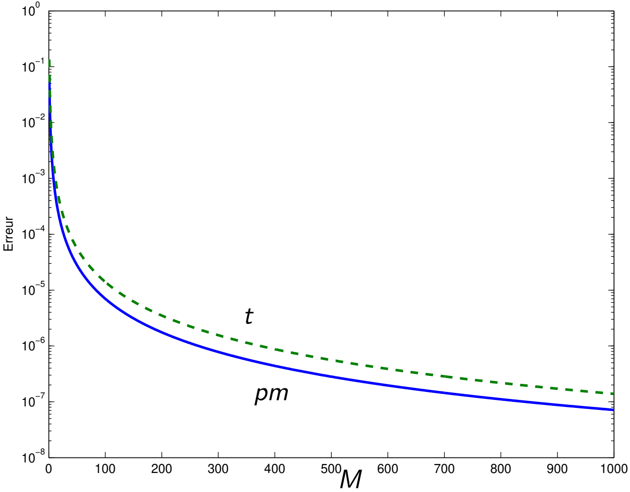
Si, sur chaque sous-intervalle I_k, on remplace f par le polynôme d'interpolation $\Pi_1 f(x)$ de degré 1 aux nœuds x_{k-1} et x_k, on obtient la *formule composite du trapèze*:

$$\boxed{I_t^c(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{M}[f(x_k) + f(x_{k-1})] = \frac{H}{2}[f(a) + f(b)] + H\sum_{k=1}^{M-1} f(x_k).} \qquad (6)$$


0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
f
$\Pi_1^H f$
$x_0 = a$
$x_M = b$

Example

On considère $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$ où $f(x) = \cos(x^2)$: la figure suivante montre l'erreur d'intégration $|I_{pm}^c(f) - I(f)|$ (formule composite du point milieu) et $|I_t^c(f) - I(f)|$, (formule composite du trapèze) en fonction du nombre de sous-intervalles M.



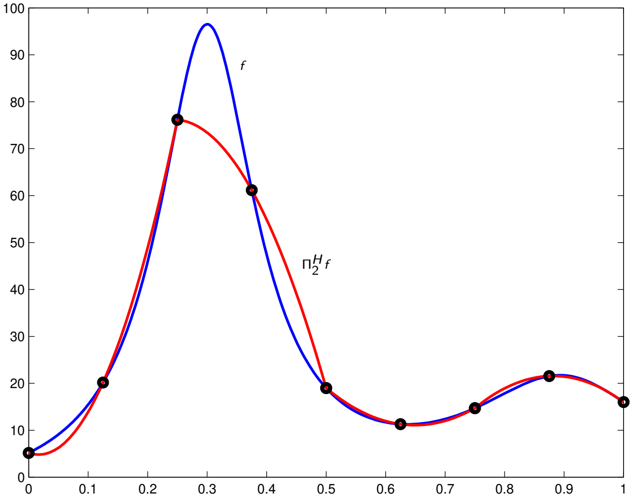
3. La formule composite de Simpson

La formule de Simpson est obtenue en remplaçant f par son polynôme interpolant composite $\Pi_2^H f(x)$ de degré 2. En particulier, $\Pi_2^H f(x)$ est une fonction continue par morceaux qui, sur chaque sous-intervalle I_k, est obtenue comme le polynôme interpolant f aux nœuds

$$x_{k-1},\ \overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} \text{ et } x_k \text{ (voir figure suivante).}$$

On obtient donc la *formule composite de Simpson*:

$$\boxed{I_s^c(f) = \frac{H}{6}\sum_{k=1}^{M}\left[f(x_{k-1}) + 4f(\overline{x}_k) + f(x_k)\right].} \tag{7}$$


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
f
$\Pi_2^H f$

Erreur d'intégration

Definition

On définit l'**ordre** d'une formule d'intégration par l'ordre de son erreur par rapport à H.

- Formule composite du point milieu. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{pm}(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{ordre } 2$$

- Formule composite du trapèze. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{t}(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{ordre } 2$$

- Formule composite de Simpson. Si f est dans $C^4([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{s}(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x \in [a,b]} |f''''(x)| \Rightarrow \text{ordre } 4$$

$$H = \frac{b-a}{N}$$

Definition

Une formule de quadrature $\tilde{I}$ sur l'intervalle $[a, b]$ est exacte pour une fonction f si

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

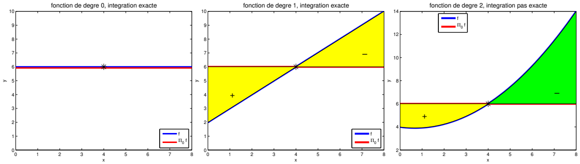
Elle est **exacte de degré r** si elle est exacte pour tout f polynôme de degré r, i.e.

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \quad \forall f \in \mathbb{P}_r,$$

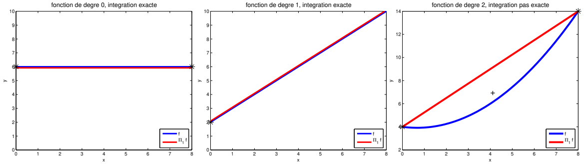
En prenant pour $\tilde{I}$ les formules simples du point milieu, du trapèze et de Simpson, on peut associer un degré d'exactitude aux formules que l'on vient de traiter.
En particulier, on peut montrer que I_{pm} et I_t sont exactes de degré 1; la formule de Simpson est exacte de degré 3.

Formule Composite	*Dg. Exact.*	*Ordre par rapport à H*
Point milieu (5)	1	2
Trapèze (6)	1	2
Simpson (7)	3	4

Formule du point milieu



Formule du trapèze



Formule de Simpson