Analyse Numériques SV

1 – Interpolation

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

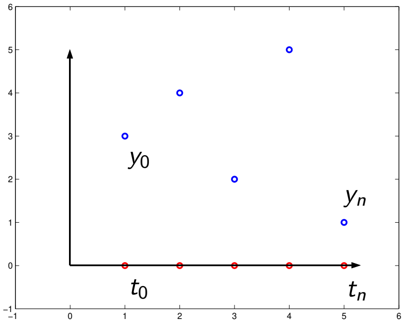
Printemps 2020

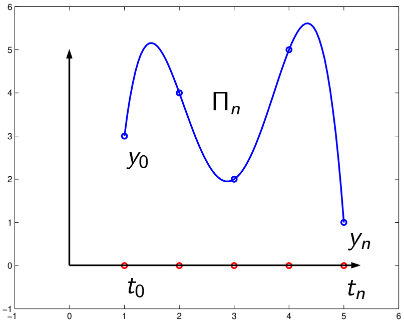
POSITION DU PROBLÈME
(JUPYTER NOTEBOOK)

Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Etant donnés $n+1$ noeuds distincts t_0, $t_1, \ldots$ t_n et $n+1$ valeurs y_0, $y_1, \ldots$ y_n, on cherche un polynôme p de degré n, tel que

$$\boxed{p(t_j) = y_j \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq n.} \tag{1}$$

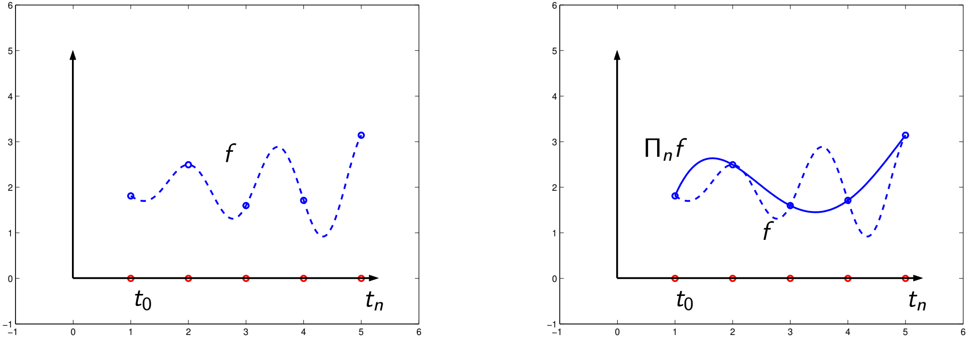
Si ce polynôme existe, on note $p = \Pi_n$ et on appelle Π_n le polynôme d'interpolation des valeurs y_j aux noeuds t_j, $j = 0, \ldots, n$.





$(n = 4)$

Soit $f \in C^0(I)$ et $t_0, \ldots, t_n \in I$. Si on prend $y_j = f(t_j)$, $0 \leq j \leq n$, alors le polynôme d'interpolation $\Pi_n(t)$est noté $\Pi_n f(t)$ et est appelé l'interpolant de f aux noeuds $t_0, \ldots\ t_n$.



$(n = 4)$

Base de Lagrange
(Jupyter Notebook)

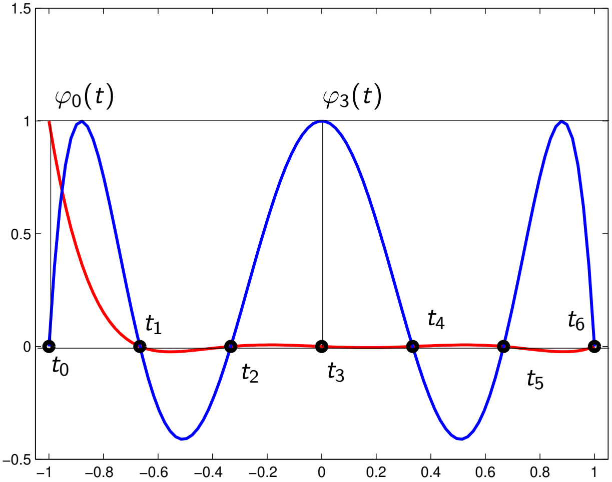
On considère les polynômes φ_k, $k = 0, \ldots, n$ de degré n tels que

$$\varphi_k(t_j) = \delta_{jk}, \qquad k, j = 0, \ldots, n,$$

où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$. Explicitement, on a

$$\boxed{\varphi_k(t) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(t - t_j)}{(t_k - t_j)}.}$$

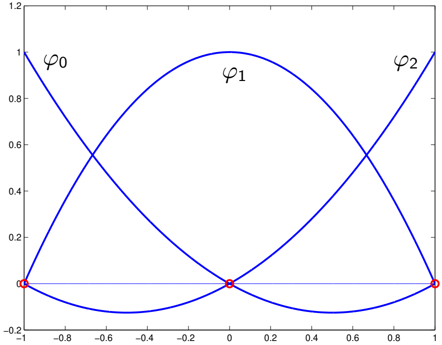
La figure qui suit montre deux polynômes de Lagrange de degré $n = 6$ relatifs aux noeuds d'interpolations $t_0 = -1$, $t_1 = -2/3, \ldots, t_5 = 2/3$, et $t_6 = 1$.



Exemple

Pour $n = 2$, $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, *les polynômes de la base de Lagrange sont*

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{1}{2}t(t-1),\\
\varphi_1(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = -(t+1)(t-1),\\
\varphi_2(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{1}{2}t(t+1).
\end{aligned}
$$



Polynôme d'interpolation
(Jupyter Notebook)

Le polynôme d'interpolation Π_n des valeurs y_j aux noeuds t_j, $j = 0, \ldots, n$, s'écrit

$$\boxed{\Pi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(t),} \tag{2}$$

car il vérifie $\Pi_n(t_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(t_j) = y_j$.

Par conséquent, on aura

$$\boxed{\Pi_n f(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k) \varphi_k(t).}$$

On montre maintenant que le polynôme Π_n défini en (2) est le seul polynôme de degré n interpolant les données y_j aux nœuds t_j.

En effet, soit $Q_n(t)$ un autre polynôme d'interpolation. Alors, on a

$$Q_n(t_j) - \Pi_n(t_j) = 0, \qquad j = 0, \dots, n.$$

Donc, $Q_n(t) - \Pi_n(t)$ est un polynôme de degré n qui s'annule en $n+1$ points distincts; il en suit que $Q_n = \Pi_n$, d'où l'unicité du polynôme interpolant.

INTERPOLATION D'UNE FONCTION RÉGULIÈRE

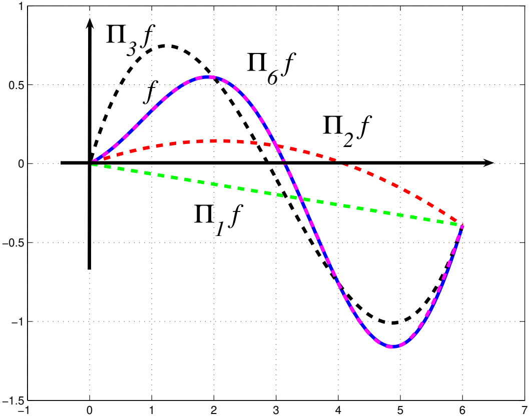
Théorème (Erreur d'interpolation) Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $n+1$ nœuds *équirépartis* dans $I = [a, b]$ et soit $f \in C^{n+1}(I)$. Pour $t \in I$, soit $E_n f(t) = f(t) - \Pi_n f(t)$. Alors, on a

$$\boxed{\max_{x \in I} |E_n f(t)| \leq \frac{1}{2(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(t)|,} \tag{3}$$

où $h = \frac{b-a}{n}$. On remarque que l'erreur d'interpolation dépend de la dérivée $n+1$-ième de f.

EXEMPLE

Polynômes d'interpolation $\Pi_i f$ *pour* $i = 1, 2, 3, 6$ *et* $f(t) = \dfrac{t+1}{5}\sin(t)$, *avec des noeuds équirépartis sur* $[0, 6]$.

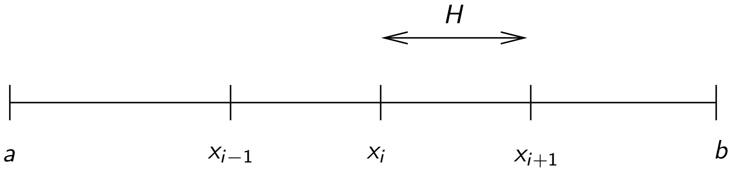


Interpolation linéaire par morceaux

(Sec. 3.4 du livre)

Soient $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ des noeuds qui divisent l'intervalle $I = [a, b]$ en une réunion d'intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de longueur H où

$$H = \frac{b-a}{N}.$$

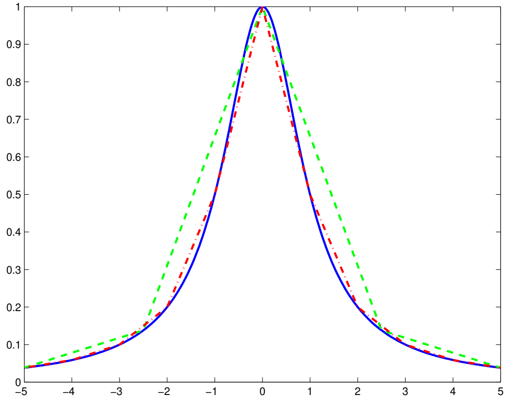


Sur chaque sous-intervalle I_i, on interpole $f_{|I_i}$ par un polynôme de degré 1. Le polynôme par morceaux (polynôme composite) qu'on obtient est noté $\Pi_1^H f(t)$ et on a:

$$\Pi_1^H f(t) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad \text{pour } x \in I_i.$$

Exemple

5 (suite) *On considère les polynômes par morceaux de degré $n = 1$ interpolant la fonction de Runge pour 5 et 10 sous-intervalles de $[-5, 5]$.*



La figure montre les polynômes $\Pi_1^{H_1} f$ et $\Pi_1^{H_2} f$ pour $H_1 = 2.5$ et $H_2 = 1.0$.

Théorème 1 (Prop. 3.3 du livre)
Si $f \in C^2(I)$, ($I = [x_0, x_N]$) et on dénote $E_1^H f(t) = f(t) - \Pi_1^H f(t)$, alors

$$\boxed{\max_{x \in I} \mid E_1^H f(t) \mid \leq \frac{H^2}{8} \max_{x \in I} |f''(t)|.}$$

Démonstration

D'après la formule (3), sur chaque intervalle I_i, on a

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \mid E_1^H f(t) \mid \leq \frac{H^2}{4(1+1)} \max_{x \in I_i} \mid f''(t) \mid .$$

REMARQUE

On peut montrer que, si l'on utilise un polynôme de degré n (≥ 1) et si l'on dénote $E_n^H f(t) = f(t) - \Pi_n^H f(t)$, dans chaque sous-intervalle I_i, on trouve

$$\boxed{\max_{x \in I} \mid E_n^H f(t) \mid \leq \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(t)| .}$$

La méthode des moindres carrés

(Sec. 3.6 du livre)

Supposons que l'on dispose de $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $n+1$ valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_n$. On a vu que, si le nombre de données est grand, le polynôme interpolant peut présenter des oscillations importantes.

Pour avoir une meilleure représentation des données, on peut chercher un polynôme de degré $m < n$ qui approche "au mieux" les données.

Definition

On appelle *polynôme aux moindres carrés de degré m* $\tilde{f}_m(t)$ le polynôme de degré m tel que

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} |y_i - \tilde{f}_m(x_i)|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |y_i - p_m(x_i)|^2 \qquad \forall p_m(t) \in \mathbb{P}_m} \tag{4}$$

Remarque

Lorsque $y_i = f(x_i)$ (f étant une fonction continue) alors $\tilde{f}_m$ est dit l'approximation de f au sens des moindres carrés.

Autrement dit, le polynôme aux moindres carrés est le polynôme de degré m qui, parmi tous les polynômes de degré m, minimise la distance des données.
Si on note $\tilde{f}_m(t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ et on définit la fonction

$$\Phi(b_0, b_1, \ldots, b_m) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \left(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \ldots + b_m x_i^m\right)\right)^2,$$

alors le problème (4) peut être reformulé ainsi: trouver $a_0, a_1, \ldots a_m$ tels que

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \min_{b_i, i=0,\ldots,m} \Phi(b_0, b_1, \ldots, b_m)$$

Les coefficients du polynôme aux moindres carrés peuvent être donc déterminés par les relations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_i} = 0, \qquad 0 \leq i \leq m \tag{5}$$

ce qui nous donne $m+1$ relations linéaires entre les a_k.

Utilisons cette méthode dans un cas simple. Considérons les points $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ et les valeurs $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 7$ et calculons le polynôme interpolant de degré 1 au sens des moindres carrés (*droite de régression*).

Le polynôme recherché a la forme $\tilde{f}_1(t) = a_0 + a_1 x$. On définit:

$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{2} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2$ et on cherche le point (a_0, a_1) où Φ atteint son minimum.

Donc, on impose les conditions $\frac{\partial \Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) &= -2 \sum_{i=0}^{2} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = -2 \left(\sum_{i=0}^{2} y_i - 3a_0 - a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i \right) \\
&= -2(9 - 3a_0 - 8a_1) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) &= -2 \sum_{i=0}^{2} x_i [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = -2 \left(\sum_{i=0}^{2} x_i y_i - a_0 \sum_{i=0}^{2} x_i - a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i^2 \right) \\
&= -2(34 - 8a_0 - 26a_1)
\end{aligned}$$

Donc les coefficients a_0 et a_1 du polynôme sont les solutions du système linéaire:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3a_0 & + & 8a_1 & = & 9 \\ 8a_0 & + & 26a_1 & = & 34 \end{array} \right.$$

En général, on observe que, si pour calculer le polynôme interpolant aux moindres carrés $\tilde{f}_m(t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$, on impose les conditions d'interpolation $\tilde{f}_m(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$, alors on trouve le système linéaire $B\mathbf{a} = \mathbf{y}$, où B est la matrice de dimension $(n+1) \times (m+1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^m \end{pmatrix}$$

Puisque $m < n$ le système est surdéterminé, c'est-à-dire que le nombre de lignes est plus grand que le nombre de colonnes. Donc, on ne peut pas résoudre ce système de façon classique, mais on doit le résoudre au sens des moindres carrés, en considérant:

$$\boxed{B^T B\mathbf{a} = B^T \mathbf{y}.}$$

Ce système linéaire est dit *système d'équations normales*. On peut montrer que les équations normales sont équivalentes au système (5).