

- 1) Donner la ^{forme de} formule de quadrature en expliquant les notations
- 2) Donner la définition de degré d'exactitude d'une formule de quadrature
- 3) Démontrez le théorème suivant en complétant l'encadré

Théorème (poids d'interpolation) Soit J une formule de quadrature avec M nœuds.

J est exacte de degré $M-1 \iff w_j = \int_{-1}^1 \phi_j(t) dt \quad j=1, \dots, M$ où $\phi_j \dots$

1) Une formule de quadrature $J(g)$ permet d'approcher $\int_{-1}^1 g(t) dt$ pour une fonction continue $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Etant donné : M points d'intégration
 M poids

$-1 \leq t_1 < \dots < t_k < \dots < t_M \leq 1$
 $w_1, \dots, w_M$

elle s'écrit $J(g) = \sum_{k=1}^M w_k g(t_k)$

$$= J(g) + J(f)$$

$$J(\lambda g) = \lambda J(g) \quad J(g+f) = \sum w_k (g+f)(t_k) = \sum w_k g(t_k) + \sum w_k f(t_k)$$

2) La formule de quadrature $J(g)$ est exacte de degré r si pour tout polynôme p de degré $\leq r$

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = J(p)$$

3) Soient $\{\varphi_k\}_{k=1, \dots, M}$ la base de Lagrange associée aux points $t_1, \dots, t_M$

Soit $p \in \mathcal{P}_{M-1}$, alors $p = \sum_{k=1}^M p(t_k) \varphi_k(t)$ (Interpolation de Lagrange)

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{k=1}^M p(t_k) \int_{-1}^1 \varphi_k(t) dt$$

$$J(p) = \sum w_k p(t_k)$$

$$J(p) = \sum_{k=1}^M p(t_k) \underbrace{J(\varphi_k)}_{w_k = \int_{-1}^1 \varphi_k(t) dt}$$

J est linéaire

Si $w_k = \int_{-1}^1 \varphi_k(t) dt \Rightarrow J(p) = \sum_{k=1}^M p(t_k) \int_{-1}^1 \varphi_k dt = \int_{-1}^1 p(t) dt \Rightarrow J$ exacte de degré $M-1$

Si est exacte de degré $M-1$. Alors pour tout φ_l (Base de Lagrange), $l=1, \dots, M$

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(t) dt = J(\varphi_l) = \sum_{k=1}^M w_k \underbrace{\varphi_l(t_k)}_{\delta_{lk}} = \sum_{k=1}^M w_k \delta_{kl} = w_l \quad \square$$