

1) Donner la définition d'une méthode de point fixe

2) Démontrer le Théorème suivant, en complétant l'encadré $\square$

Théorème (convergence locale) Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dans $C(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\phi(\alpha) = \alpha$ et $|\phi'(\alpha)| < 1$

Alors $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, la méthode de point fixe converge vers α .

De plus, $\exists 0 < c < 1$ telle que $\forall n = 0, 1, \dots$ $|x_{n+1} - \alpha| \leq c |x_n - \alpha|$

1) Soit $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in [a, b]$ un point recherché, tel que $\alpha = \phi(\alpha)$.

Une méthode de point fixe essaie d'approcher le point fixe α par une

une suite $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$ définie par : $x_0 \in [a, b]$, pour $n = 0, 1, 2, \dots$ $x_{n+1} = \phi(x_n)$

$$2) \phi \in C^1 \text{ et } |\phi'(\alpha)| < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon], \quad |\phi'(x)| < 1$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \exists |\phi'(x)| \leq C < 1 \quad \forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \quad |\phi'(x)| \leq C$$

Supposons que $x_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Rappel: $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $\alpha = \phi(\alpha)$

$$|\alpha - x_{n+1}| = |\phi(\alpha) - \phi(x_n)| = |\phi(x_n) - \phi(\alpha)|$$

Taylor avec reste en α : $\phi(x_n) - \phi(\alpha) = \phi'(\eta_n)(x_n - \alpha)$ avec $\eta_n \in [x_n, \alpha]$ ou $[\alpha, x_n]$

$$\eta_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

$$|\phi(x_n) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\eta_n)| |x_n - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|$$

$$1) \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|$$

$$2) \quad C < 1 \Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow \underline{x_{n+1} \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]}$$

Selon les hypothèses: $x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \xRightarrow{1)} x_1 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \xRightarrow{2)} x_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$
 $\forall n = 0, 1, \dots$

D'après 1), puisque $x_n \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, $|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha| \leq C^2 |x_{n-1} - \alpha| \leq \dots$
 $|x_n - \alpha| \leq C^n |x_0 - \alpha| \leq C^n \varepsilon$ $C < 1 \quad |x_n - \alpha| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow$ convergence