Exercice 1

On considère la formule de quadrature suivante :

$$I(f) = \frac{1}{9}[5f(-1) + 16f(\omega) - 3f(1)]$$

pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, où $\omega \in (-1, 1)$.

1. Rappeler la définition de degré d'exactitude r d'une formule de quadrature, puis déterminer la valeur de ω telle que le degré d'exactitude de la formule $I(f)$ donnée soit $r = 2$.

2. On veut intégrer la fonction $f(x) = e^{x^2}$ sur l'intervalle [0,1]. Pour cela, on divise l'intervalle [0,1] en M sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de la même longueur $H = x_k - x_{k_1} = 1/M$, $k = 1, \ldots, M$, avec $x_0 = 0$ et $x_M = 1$, et on considère la formule composite du point milieu (rectangle) $I^c_{pm}(f)$. Soit $I_{pm,(k)}(f)$ la formule simple du point milieu (rectangle) sur le sous-intervalle I_k. En sachant que l'erreur commise sur chaque intervalle est :

$$E^{pm}_{(k)} = \left| \int_{I_k} f(x)dx - I_{pm,(k)}(f) \right| \leq \frac{H^3}{24} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \quad \text{si } f \in C^2,$$

   calculer l'erreur globale $E^c_{pm} = |I(f) - I^c_{pm}(f)|$ introduite par la formule composite du point milieu $I^c_{pm}(f) = \sum_{k=1}^{M} I_{pm,(k)}(f)$ sur l'intervalle [0,1]. Trouver le nombre minimal M de sous-intervalles afin que $E^c_{pm} \leq 10^{-2}$.

3. On a appliqué deux autres formules de quadrature composites $I^c_a(f)$ et $I^c_b(f)$ pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ en supposant que $f \in C^\infty([-1, 1])$.
   Le tableau suivant montre l'erreur commise pour différentes valeurs de la longueur H des sous-intervalles :

H	erreur $I^c_a(f)$	erreur $I^c_b(f)$
1.00	1.547	8.410e–03
0.10	1.580e–02	8.125e–07
0.01	1.580e–04	8.121e–11

   Déduire de façon approximative l'*ordre de convergence* des deux formules $I^c_a(f)$ et $I^c_b(f)$. Quelles formules que vous connaissez pourraient donner les valeurs du tableau ?

Exercice 1

1) Une formule de quadrature est exacte de degré r si pour tout polynôme p de degré $\leq r$ $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = J(p)$, où J représente la formule de quadrature.

Rappel : l'intégrale ainsi que la formule de quadrature sont linéaires.

Il suffit donc de vérifier l'égalité $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = I(p)$ pour $p = 1, x, x^2$.

$p = x^2$: $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$$I(p) = \frac{1}{9}\left[5\cdot(-1)^2 + 16\,\omega^2 - 3\cdot 1^2\right] = \frac{1}{9}\left(2 + 16\omega^2\right) \Big) = !$$

$$9\cdot\frac{2}{3} \overset{!}{=} 2 + 16\omega^2 \quad \Rightarrow \quad 16\omega^2 = 6 - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{4}, \quad \omega = \mp\frac{1}{2}$$

$p = 1$: $\int_{-1}^{1} dx = 2$, $I(p) = \frac{1}{9}\left(5\cdot 1 + 16\cdot 1 - 3\cdot 1\right) = \frac{1}{9}(18) = 2$

$p = x$: $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, $I(p) = \frac{1}{9}\left(5\cdot(-1) + 16\omega - 3\cdot 1\right) = \frac{1}{9}\left(-8 + 16\omega\right)$ $\begin{cases} \omega = -\frac{1}{2} & < 0 \\ \omega = +\frac{1}{2} & = 0 \end{cases}$

Pour $\boxed{\omega = \frac{1}{2}}$ la formule est exacte de degré 2.

2. a) $I^c_{pm}(f) = \sum_{k=1}^{M} I_{pm(k)}(f)$, $\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$

$$E^{pm}_c(f) = \left| \int_0^1 f - I^c_{pm}(f) \right| = \left| \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - I_{pm(k)}(f) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{M} \left| \int_{I_k} f - I_{pm(k)}(f) \right| \leq \sum_{k=1}^{M} \frac{H^3}{24} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)|$$

$$\leq \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)|$$

$$\leq \frac{H^3}{24} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)| \underbrace{\sum_{k=1}^{M} 1}_{M} = \underbrace{M \cdot H}_{1} \frac{H^2}{24} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24} \max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)|$$

b) $f(x) = e^{x^2}$. $f'(x) = 2x e^{x^2}$ $f''(x) = 2e^{x^2} + (2x)^2 e^{x^2} = \underbrace{e^{x^2}}\left(\underbrace{2 + 4x^2}\right)$

$[0,1]$: ↑ croissante ↑ croissante.

$$\max_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)| = f''(1) = e(2+4) = 6e$$

$$E^{pm}_c \simeq 10^{-2} = \frac{H^2}{24} \max |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24} \cdot 6e \Rightarrow H^2 = \frac{10^{-2} \cdot 24}{6e} = 0{,}0147 \quad H = 0{,}12 \quad M \simeq 8{,}24$$

Il faut donc au moins 9 sous-intervalle pour obtenir une erreur $\leq 10^{-2}$.

3. $E(H) = C H^d$ erreur d'ordre d en H

$E\left(\frac{H}{10}\right) = C \frac{H^d}{10^d} = C \cdot 10^{-d} H^d$

$E\left(\frac{H}{100}\right) = C \frac{H^d}{100^d} = C \cdot 100^{-d} H^d$

$E(H) / E\left(\frac{H}{10}\right) = \frac{C H^d}{C \cdot 10^{-d} H^d} = 10^{+d}$ | $\frac{E(H)}{E(H/100)} = \frac{C H^d}{C \cdot 100^{-d}} = 100^d = 10^{2d}$

I_a^c] $\frac{1,57}{1,58 \cdot 10^{-2}} = 10^2 \leq 10^d \Rightarrow d = 2$

$\frac{1,57}{1,58 \cdot 10^{-4}} = 10^4 = 10^{2d} \Rightarrow d = 2$

L'ordre de convergence est de 2 par rapport à H

Il peut s'agir de la formule composite du point milieu ou du trapèze

I_b^c] $\frac{8,4 \cdot 10^{-3}}{8,1 \cdot 10^{-7}} \approx 10^4 = 10^d \Rightarrow d = 4$

$\frac{8,4 \cdot 10^{-3}}{8,1 \cdot 10^{-11}} \approx 10^8 = 10^{2d} \Rightarrow d = 4.$

L'ordre de convergence est 4

Il peut s'agir de la formule composite de Simpson.

Exercice 3

On considère l'équation non-linéaire $f(x) = 0$, où $f(x) = e^{-x} - x^2$.

a) Montrer qu'il existe un seul zéro α de f dans $[0, 1]$ et que la méthode de dichotomie (bissection) peut être utilisée afin de le calculer.

b) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de bissection nécessaire pour approximer α avec une tolérance de 10^{-10}.

c) Ecrire la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$\phi(x) = x + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et montrer sa convergence vers la solution α.

d) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de point fixe nécessaire pour calculer une solution approchée avec une tolérance de 10^{-10}.

Exercice 4

On considère le système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \theta & 0 \\ \theta^2 & 4 & \theta \\ 0 & \theta^2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \theta \geq 0. \tag{4}$$

a) Ecrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi appliquée au système (4) et déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur $\theta \geq 0$ afin que la méthode soit convergente.

b) Répondre à la même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

c) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel converge pour un ensemble de valeurs de θ plus grand que la méthode de Jacobi ? Si le deux méthodes convergent, quelle est la méthode qui requiert moins d'itérations ?

Plus une preuve
Plus une fonction en Python

Exercice 4. La méthode de Jacobi : $D\vec{x}^{(k+1)} = \vec{b} - (A-D)\vec{x}^{(k+1)}$

Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode de Jacobi est que $\rho(B_J) < 1$.

$B_J = P^{-1}(P-A) = D^{-1}(D-A)$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_J = D^{-1}(D-A) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ -\theta^2 & 0 & -\theta \\ 0 & -\theta^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\theta}{2} & 0 \\ -\frac{\theta^2}{4} & 0 & -\frac{\theta}{4} \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B_J c'est la matrice d'itération de la méthode de Jacobi.

$\rho(B_J) = \max_{\lambda} |\lambda|$.

$$\det(B_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\theta}{2} & 0 \\ -\frac{\theta^2}{4} & -\lambda & -\frac{\theta}{4} \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} +\lambda & +\frac{\theta}{4} \\ +\frac{\theta^2}{2} & +\lambda \end{vmatrix} + \left(+\frac{\theta^2}{4}\right) \begin{vmatrix} +\frac{\theta}{2} & 0 \\ +\frac{\theta^2}{2} & +\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\theta^3}{8}\right) + \frac{\theta^2}{4}\left(\lambda \cdot \frac{\theta}{2}\right) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\theta^3}{8} - \frac{\theta^3}{8}\right) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\theta^3}{4}\right)$$

$P_{B_J}(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\theta^3}{4}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\theta^3}{4}} = \frac{\theta^{3/2}}{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{\frac{\theta^3}{4}} = -\frac{\theta^{3/2}}{2}$

$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{\theta^3}{4}}$

$\rho(B_J) < 1 \iff \sqrt{\frac{\theta^3}{4}} < 1 \iff \frac{\theta^3}{4} < 1 \iff \theta^3 < 4 \iff \theta < \sqrt[3]{4}$

La méthode de Jacobi converge si $\theta < \sqrt[3]{4}$ (et $\theta \geq 0$)

b) A est régulière? (inversible) $\det(A) = 16 + 0 + 0 - 2\theta^3 - 2\theta^3 = 8 - 4\theta^3 = 4(4 - \theta^3)$

avec $\theta^3 < 4$ on a $\det(A) > 0$ donc A est inversible.

Aussi : A est Tridiagonale et ses coeff. diagonaux sont tous non-nul.

De plus, Jacobi converge, avec $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{\theta^3}}{2}$.

Un critère de convergence nous dit que dans ce cas, Gauss-Seidel converge aussi, et $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2 = \frac{\theta^3}{4}$.

c) Les méthodes convergent pour les mêmes valeurs de ω.

Le rayon spectrale de B_{GS} est plus petit que $\rho(B_J)$, donc Gauss-Seidel converge plus rapidement.

Exercice 3

On considère l'équation non-linéaire $f(x) = 0$, où $f(x) = e^{-x} - x^2$.

a) Montrer qu'il existe un seul zéro α de f dans $[0, 1]$ et que la méthode de dichotomie (bissection) peut être utilisée afin de le calculer.

b) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de bissection nécessaire pour approximer α avec une tolérance de 10^{-10}.

c) Ecrire la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$\phi(x) = x + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et montrer sa convergence vers la solution α.

d) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de point fixe nécessaire pour calculer une solution approchée avec une tolérance de 10^{-10}.

Exercice 3 $f(x) = e^{-x} - x^2$ $\quad x \in [0,1]$

a) $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$ $\quad f(1) = \underbrace{e^{-1}}_{<1} - 1 < 0$

La fonction est continue dans $[0,1]$ (somme de 2 fonctions continue), elle change de signe, donc elle admet au moins un zéro et aussi la méthode de bissection peut utilisé pour trouver un de ces zéros.

$f'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{<0} \underbrace{-2x}_{\leq 0} < 0$, la fonction f est strictement monotone decroissante.

Il ne peut y avoir qu'un zero possible. Le zero $\alpha : f(\alpha) = 0$ est unique.

b) $E_k \leq \dfrac{b-a}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2^{k+1}} \approx 10^{-10} \iff 2^{k+1} \approx 10^{10} \Rightarrow (k+1)\log 2 \approx 10 \log 10$

$k+1 = \dfrac{10 \log 10}{\log 2}$, $k \cong 32{,}21 \Rightarrow$ Il faudra 33 iterations.

c) $\phi(x) = x + \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$ $\quad x \in [0,1]$

Soit α : $f(\alpha) = 0$, alors $e^{-\alpha} - \alpha^2 = 0$

et $\phi(\alpha) = \alpha + \frac{1}{4}\underbrace{(e^{-\alpha} - \alpha^2)}_{=0} = \alpha$

Le zéro de f est aussi un point fixe de ϕ

Méthode de point fixe : $x_0 \in [0,1]$, pour $k = 0,1,2,\ldots$ $x_{k+1} = \phi(x_k)$, i.e.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{4}(e^{-x_k} - x_k^2)$$

Si $|\phi'(x)| < 1$ dans $[0,1]$, alors la méthode de point fixe converge.

$$\phi'(x) = 1 + \frac{1}{4}\underbrace{(\underbrace{-e^{-x}}_{\in [-1,-e^{-1}]} - 2x)}_{\in [-3,-e^{-1}]}$$

$\in [-2,0]$

$\in [-3/4 ; -\frac{e^{-1}}{4}]$

$x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \phi'(x) \in \left[\frac{1}{4}, 1 - \frac{e^{-1}}{4}\right]$$

$$\frac{1}{4} < \phi(x) < 1 - \frac{1}{4e} < 1 .$$

La méthode de point fixe converge vers α pour tout $x_0 \in [0,1]$

d) $|x^{(k+1)} - \alpha| < C |x^{(k)} - \alpha|$ où $|\phi'(x)| \leq C < 1$

$\Rightarrow$ $|x^{(k)} - \alpha| < C^k |x^{(0)} - \alpha|$

ici : $C = 1 - \frac{1}{4e}$

si $x^{(0)} \in [0,1]$ quelconque, $|x^{(0)} - \alpha| \leq 1$

$x^{(0)} = \frac{1}{2}$, $|x^{(0)} - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

$|x^{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2} C^k \approx 10^{-10}$

$k \log C \cong -10 \log 10 + \log 2$, $k \cong \frac{-10 \log 10}{\log C} = \frac{-10 \log 10}{\log\left(1 - \frac{1}{4e}\right)} = 238{,}66 = 231{,}5$

Il faudra donc 239 itérations pour être sûr de converger avec une tolérance de 10^{-10}

——// —— 232

$\phi'(\alpha) = 0 = \phi''(\alpha) = \ldots = \phi^{(n)}(\alpha)$

$\phi^{(n+1)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Convergence d'ordre n

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2e^{-y(t)} & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On note par u_n l'approximation de $y(t_n)$ au temps $t_n = nh$, h étant le pas de discretisation.

1. Ecrire les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Heun pour résoudre numériquement le problème donné.
2. En sachant que la solution exacte est $y(t) = \ln(e^2 + 2t)$, trouver les valeurs de h qui garantissent la stabilité du schéma d'Euler progressif.
3. En général, quel est l'ordre de convergence de la méthode de Heun ? Est-ce que cette méthode est stable ? Calculer l'approximation u_1 qu'on trouve par cette méthode.
4. Réécrire la méthode d'Euler rétrograde sous la forme

   $$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}), \qquad \forall n \geq 0,$$

   où ϕ est une fonction convenable qui dépend aussi de u_n et de h. Montrer que la suite $\{u_n\}$ est croissante.
5. Afin de trouver l'inconnue u_{n+1} (étant donnés u_n et h), utiliser des itérations de point fixe avec ϕ comme fonction d'itération. Etablir une condition sur h suffisante à garantir que cette méthode de point fixe converge.

Exercice 2.

1) Soit ~~$n \in \mathbb{N}$~~, $n = 0, 1, \dots, N_h - 1$, $t_n = t_0 + nh = nh$, $h > 0$ $T = 10$, $\frac{T}{h} = \frac{10}{h} = N_h$

Euler progressif : $\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \\ u_0 = y(t_0) \end{cases}$ ici $f(t, y) = 2e^{-y}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h 2 e^{-u_n} & n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Euler rebrogade : $\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) = 2e^{-u_{n+1}}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h 2 e^{-u_{n+1}} & \text{(implicite)} \quad n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Heun : $\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \underbrace{u_n + h f(t_n, u_n)}_{\text{"EP"}}) \right]$

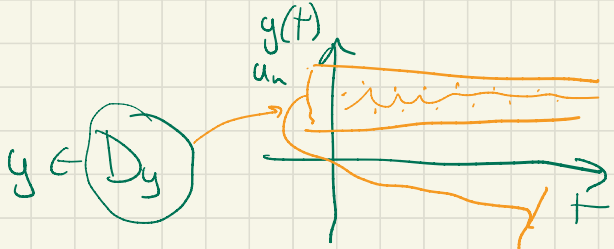
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}h\left[2e^{-u_n} + 2e^{-(u_n + h2e^{-u_n})}\right]$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2he^{-u_n}\left[1 + e^{-h2e^{-u_n}}\right] \\ u_0 = 2 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \dots N_h - 1$$

2) Stabilité : $h < \frac{2}{\lambda_{max}}$ pour autant que $\frac{\partial f}{\partial y} \in [-\lambda_{max}, -\lambda_{min}]$

avec $\lambda_{max} < \infty$, $\lambda_{min} > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{-2e^{-y}}_{-2e^{-y} \in [-\infty, 0)}, \quad y(t) = \ln(e^2 + 2t)$$



On suppose que u_n ne sera pas loin de $y(t)$. On ne regarde que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur le trajectoire de $y(t)$. $y(t) \in [\underbrace{\ln(e^2)}_{2}, \ln(e^2 + 20)]$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) \in \left[\overbrace{-2e^{-2}}^{\lambda_{max}}; \overbrace{-2e^{-(\ln(e^2+20)}}^{\lambda_{min}}\right]$$

$$\lambda_{min} = 2e^{-(\ln(e^2+20))}, \quad \lambda_{max} = 2e^{-2}$$

$$h < \frac{2}{\lambda_{max}} = \frac{2}{2e^{-2}} = e^2$$

La méthode est stable si $h < e^2$ (pour autant que u_n reste dans l'intervalle $[2, \ln(e^2+20)]$).

3. Heun converge à l'ordre 2 et c'est une méthode conditionnellement stable.

$$u_1 = 2 + 2he^{-2}\left(1 + e^{-2he^2}\right)$$

4. $u_{n+1} = u_n + 2h\, e^{-u_{n+1}}$ $\qquad \phi(x) = u_n + 2h\, e^{-x}$ dépend de h et u_n.

$2h\, e^{-u_{n+1}} > 0$ car > 0

$u_{n+1} = u_n + \underbrace{>0}_{>0} > u_n \quad \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ pour tout n,

$\{u_n\}_{n=0,\dots,N_h}$ est croissante.

s) $\phi'(x) = -h2e^{-x}$ (u_n croissante)

$|\phi'(x)| = h2e^{-x} < 1 \quad \forall x \in [u_n, \infty)$

$h < \frac{1}{2}e^{x} \quad \forall x > u_n$

$\Rightarrow h < \frac{1}{2}e^{u_n}$

on a $u_0 = 2$, $u_n \geq 2 \Rightarrow h < \frac{1}{2}e^{2}$

(On remarque que dans cette situation, on a un h qui doit être plus petit que la condition de stabilité pour EP)

(Cette méthode avec $\phi(x) = u_n + h2e^{-x}$ n'est pas convenable dans cette situation)

ODE

$$-\lambda_{max} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \leq -\lambda_{min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)} \ ,$$

$$\forall n = 0, \dots, N_h \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \leq \frac{e^{Lt_n} - 1}{2L} \max_{t\in[0,T]} |y''(t)|\, h,$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$$

$$\dots = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))\right]$$

Linear Systems

$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A \quad , \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}$$

$$\begin{aligned} P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A\mathbf{z}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{{\mathbf{p}^{(k)}}^T \mathbf{r}^{(k)}}{{\mathbf{p}^{(k)}}^T A\mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)} \\ P\mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k+1)} \\ \beta_k &= \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \, , \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathrm{Cond}\,(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x\in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x\in I} |\, E_1^H f(x)\, | \leq \frac{H^2}{4} \max_{x\in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x\in I} |\, E_n^H f(x)\, | \leq \frac{H^{n+1}}{2(n+1)} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)| \, .$$

- Formule composite du point milieu. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_c^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{ordre 2}$$

- Formule composite du trapèze. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_c^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{ordre 2}$$

- Formule composite de Simpson. Si f est dans $C^4([a,b])$, alors

$$|I(f) - I_c^c(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)| \Rightarrow \text{ordre 4}$$

1) Exprimer l'erreur d'interpolation polynomiale, ainsi que les conditions pour sa validité.

2) Donner la définition d'interpolation par morceaux d'une fonction

3) Démontrer le théorème suivant :

Théorème (Interpolation linéaire par morceaux) Soit $[a,b]$ un intervalle. Il existe une constante C, telle que $\forall f \in C^2([a,b])$, $\forall H>0$

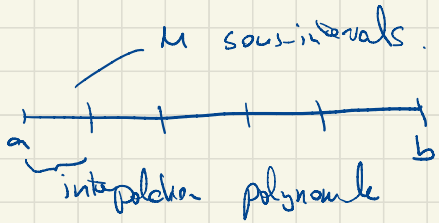
$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - \Pi_1^H f(t)| \leq \frac{H^2}{8} \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si $f \in C^{n+1}([a,b])$, $\forall H>0$

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - \Pi^n f(t)| \leq \frac{1}{4(n+1)} h^{n+1} \max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Où les point d'interpolation sont équidistribué, $x_k = a + hk$, $k = 0, \dots, N$ et $h = \frac{b-a}{N}$. $n \in \mathbb{N}$

2) Donner la définition d'interpolation par morceaux d'une fonction



Soit $M \in \mathbb{N}$, $H = \frac{b-a}{M}$ et $x_k = a + kH$, $k = 0, \dots, M$.

Soit $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, M-1$.

Soit $\Pi_n^{(k)} f$ l'interpolation polynomiale de degré n sur l'intervalle I_k

l'interpolation par morceaux est définie par la fonction

$$\Pi_n^H f(t) = \Pi_n^{(k)} f \quad \text{si } t \in I_k$$

3) Démontrer le théorème suivant :

Théorème (Interpolation linéaire par morceaux) Soit $[a,b]$ un intervalle. Il existe une constante C, telle que $\forall f \in C^2([a,b])$, $\forall H>0$

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - \Pi_1^H f(t)| \leq \frac{H^2}{8} \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

Preuve : $$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - \Pi_1^H f(t)| = \max_{k=0,\dots,M-1} \left\{ \max_{t\in I_k} |f(t) - \Pi_1 f(t)| \right\}$$

(Π_1 : interpolation par morceaux)

1), $n=1$

$$\leq \max_{k=0,\dots,M-1} \left\{ \frac{1}{4(1+1)} \left(\frac{x_{k+1}-x_k}{1} \right)^{1+1} \max_{t\in I_k} |f''(t)| \right\}$$

$\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{1} \right) \leq H$; $\max_{t\in I_k} |f''(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$

$$\leq \max_{k=0,\dots,M-1} \left\{ \frac{1}{8} H^2 \max_{t\in[a,b]} |f''(t)| \right\} = \frac{1}{8} H^2 \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

□

1) Donner la définition de différence finie centrée d'une fonction

2) Démontrer le théorème suivant, en complétant les encadrés ☐

Théorème (Différence finie centrée) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dans $\boxed{C^3[a,b]}$, $x_0 \in [a,b]$ et $H > 0$.

Alors $\forall\, 0 < h \leq H$

$$\boxed{\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{t \in [a,b]} |f'''(t)|}$$

1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in (a,b)$. La différence finie centrée de f en x_0 est donné par $[Df]^c = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ $\left[\text{ou } \dfrac{f(x_0+\frac{h}{2}) - f(x_0-\frac{h}{2})}{h} \right]$

où $h > 0$.

2) On a besoin de Taylor avec reste à l'ordre 3. Donc $f \in C^3[a,b]$

(a) $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$ pour $\xi \in [x_0, x_0+h]$

(b) $f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\eta)h^3$ pour $\eta \in [x_0-h, x_0]$

(a)-(b) $f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{6}h^3\left[f'''(\xi) + f'''(\eta)\right]$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{6}h^3\left[f'''(\eta) + f'''(\eta)\right] \quad \Big| -2hf'(x_0)$$

$$\Big| :2h$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = \frac{1}{12}h^2\left[f'''(\eta) + f'''(\eta)\right] \quad :h$$

$$\left| f'(x_0) - [Dy]^x \right| \leq \frac{1}{12}h^2 \max_{t\in[a,b]} 2\left|f'''(t)\right| = \frac{1}{6}h^2 \max_{t\in[a,b]} \left|f'''(t)\right|$$

1) Donner la définition de formule de quadrature en explicant les notations

2) Donner la définition de degré d'exactitude d'une formule de quadrature

3) Démontrer le théorème suivant en complétant l'encadré ☐

Théorème (poids d'interpolation) Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.

J est exacte de degré $M-1$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{w_j = \int_{-1}^{1} \ell_j(t)\,dt \qquad j=1,\dots,M}$ où $\ell_j \dots$

1) Une formule de quadrature $J(g)$ permet d'approcher $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ pour une fonction continue $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

Etant donné : M point d'intégration $-1 \leq t_1 < \dots < t_k < \dots < t_M \leq 1$

M poids $w_1, \dots, w_M$

elle s'écrit $J(g) = \sum_{k=1}^{M} w_k\, g(t_k)$

$J(\lambda g) = \lambda J(g)$ $\quad J(g+f) = \sum w_k (g+f)(t_k) = \sum w_k g(t_k) + \sum w_k f(t_k) = J(g) + J(f)$

2) La formule de quadrature $J(g)$ est exacte de degré r si pour tout polynôme p de degré $\leq r$ $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p)$

3) Soient $\{\varphi_k\}_{k=1,\dots,M}$ la base de Lagrange associée aux points $t_1,\dots,t_M$

Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$, alors $p = \sum_{k=1}^{M} p(t_k)\,\varphi_k(t)$ (Interpolation de Lagrange)

$$\int_{-1}^{1} p(t) = \sum_{k=1}^{M} p(t_k) \int_{-1}^{1} \varphi_k(t) \qquad , \quad J(p) = \sum_{k=1}^{M} p(t_k)\, J(\varphi_k)$$

J est linéaire

$$J(p) = \sum \omega_k\, p(t_k) \qquad \omega_k = \int_{-1}^{1} \varphi_k(t)\,dt$$

Si $\omega_k = \int_{-1}^{1} \varphi_k(t)\,dt \Rightarrow J(p) = \sum_{k=1}^{M} p(t_k) \int_{-1}^{1} \varphi_k\,dt = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt \Rightarrow J$ exacte de degré $M-1$

Si est exacte de degré $M-1$. Alors pour tout φ_ℓ (Base de Lagrange) $\ell = 1,\dots,M$

$$\int_{-1}^{1} \varphi_\ell(t) = J(\varphi_\ell) = \sum_{k=1}^{M} \omega_k \underbrace{\varphi_\ell(t_k)}_{\delta_{\ell k}} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\, \delta_{kl} = \omega_\ell$$

1) Donner la définition d'une méthode du point fixe

2) Démontrer le Théorème suivant, en complétant l'encadré ☐

Théorème (convergence locale) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans $C(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\phi(\alpha) = \alpha$ et $|\phi'(\alpha)| < 1$

Alors $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, la méthode de point fixe converge vers α.

De plus, $\exists 0 < C < 1$ telle que $\forall n = 0, 1, \ldots$ $\boxed{|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|}$

1) Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in [a, b]$ un point recherché, tel que $\alpha = \phi(\alpha)$.

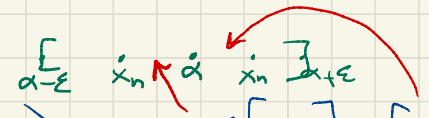
Une méthode du point fixe essai d'approcher le point fixe α par une une suite $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$ définie par : $x_0 \in [a, b]$, pour $n = 0, 1, 2 \ldots$ $x_{n+1} = \phi(x_n)$

2) $\phi \in C^1$ et $|\phi'(\alpha)| < 1$ ~~$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon], \ |\phi'(x)| < 1$~~

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \exists |\phi'(\alpha)| \leq C < 1 \quad \forall x \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon] \quad |\phi'(x)| \leq C$

Supposons que $x_n \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$. Rappel: $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $\alpha = \phi(\alpha)$

$$|\alpha - x_{n+1}| = |\phi(\alpha) - \phi(x_n)| = |\phi(x_n) - \phi(\alpha)|$$



Taylor avec reste en α: $\phi(x_n) - \phi(\alpha) = \phi'(\eta_n)(x_n - \alpha)$ avec $\eta_n \in [x_n, \alpha]$ ou $[\alpha, x_n]$

$\eta_n \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$

$$|\phi(x_n) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\eta_n)| \, |x_n - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|$$

1) $|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|$

2) $C < 1 \Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$

Selon les hypothèses: $x_0 \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon] \overset{2)}{\Rightarrow} x_1 \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon] \overset{2)}{\Rightarrow} x_n \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ $\forall n = 0, 1, \ldots$

D'après 1), puisque $x_n \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, $|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha| \leq C^2 |x_{n-1} - \alpha| < \ldots$

$|x_n - \alpha| \leq C^n |x_0 - \alpha| \leq C^n \varepsilon$ $\quad C < 1 \quad |x_n - \alpha| \to 0 \quad n \to \infty \Rightarrow$ convergence

Soit $\lambda > 0$. Nous sommes intéressé au problème modèle $\begin{cases} \dot{y}(t) = -\lambda y(t) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

1) Donner la définition de stabilité d'un schéma numérique pour ce problème

A) 2) Ecrire le schéma d'Euler progressif et donner la condition de stabilité

3) Démontrer la condition de stabilité

B) Comme A, mais pour Euler rétrograde.

1) Un schéma numérique est absolument stable pour le problème modèle si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, où $\{u_n\}_{n=0,\dots}$ est la suite du schéma numérique.

A) 1 Méthode d'Euler progressive. $\begin{cases} \frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$ $n=0,1,\dots$

2) Ici $f(t,x) = -\lambda x$

$u_{n+1} = u_n + h(-\lambda u_n) = (1-h\lambda)u_n$ EP: $\begin{cases} u_{n+1} = (1-\lambda h)u_n \\ u_0 = y_0 \end{cases}$ $n=0,1,\dots$

EP est stable si $h < \frac{2}{\lambda}$

3) $u_{n+1} = (1-\lambda h)u_n = (1-\lambda h)^2 u_{n-1} = \dots : u_n = (1-\lambda h)^n u_0$

$(u_0 \neq 0)$ $u_n \to 0 \iff (1-\lambda h)^n \to 0 \iff |1-\lambda h| < 1$

$\iff -1 < 1-\lambda h < 1 \iff -2 < -\lambda h < 0 \iff \begin{cases} -\lambda h < 0 \\ -2 < -\lambda h \end{cases}$

Puisque $\lambda > 0$ et $h > 0$: $-\lambda h < 0$ (i.e. $\lambda > 0, h > 0$)

$\iff -2 < -\lambda h \iff h < \frac{2}{\lambda}$

B) Euler Rétrograde. $\begin{cases} \frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$ $n=0,1,\dots$

$f(t,x) = -\lambda x$

2) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h(-\lambda u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \iff u_{n+1} + \lambda h u_{n+1} = u_n \iff (1+\lambda h) u_{n+1} = u_n$

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{(1+\lambda h)} u_n \\ u_0 = y_0 \end{cases}$

ER est inconditionnellement stable.

3) $u_{n+1} = \frac{1}{1+\lambda h} u_n = \left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^2 u_{n-1} = \dots \qquad u_n = \left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n u_0$

$(u_0 \neq 0) \quad u_n \to 0 \iff \left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n u_0 \to 0 \iff \left|\frac{1}{1+\lambda h}\right| < 1 \iff |1+\lambda h| > 1$

$\lambda > 0,\ h > 0 \Rightarrow 1+\lambda h > 1 \Rightarrow |1+\lambda h| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ($1+\lambda h > 0$)

$\Rightarrow$ On converge vers zero $\forall h > 0$.