

Exercice 4

On considère le système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \theta & 0 \\ \theta^2 & 4 & \theta \\ 0 & \theta^2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \theta \geq 0. \quad (4)$$

- a) Ecrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi appliquée au système (4) et déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur $\theta \geq 0$ afin que la méthode soit convergente.
- b) Répondre à la même question pour la méthode de Gauss-Seidel.
- c) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel converge pour un ensemble de valeurs de θ plus grand que la méthode de Jacobi ? Si les deux méthodes convergent, quelle est la méthode qui requiert moins d'itérations ?

Exercice 4. La méthode de Jacobi : $D \vec{x}^{(k+1)} = \vec{b} - (A - D) \vec{x}^{(k)}$

Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la méthode de Jacobi est que $\rho(B_J) < 1$.

$$B_J = P^{-1}(P - A) = D^{-1}(D - A)$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_J = D^{-1}(D - A) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ -\theta^2 & 0 & -\theta \\ 0 & -\theta^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\theta}{2} & 0 \\ -\frac{\theta^2}{4} & 0 & -\frac{\theta}{4} \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B_J est la matrice d'itération de la méthode de Jacobi.

$$\rho(B_J) = \max_{\lambda} |\lambda|.$$

$$\begin{aligned} \det(B_J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\theta}{2} & 0 \\ -\frac{\theta^2}{4} & -\lambda & -\frac{\theta}{4} \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} +1 & +\frac{\theta}{4} \\ +\frac{\theta^2}{2} & +1 \end{vmatrix} + \left(+\frac{\theta^2}{4}\right) \begin{vmatrix} +\frac{\theta}{2} & 0 \\ +\frac{\theta^2}{2} & +1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left(1^2 - \frac{\theta^3}{8}\right) + \frac{\theta^2}{4} \left(1 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = -\lambda \left(1^2 - \frac{\theta^3}{8} - \frac{\theta^3}{8}\right) = -\lambda \left(1^2 - \frac{\theta^3}{4}\right) \end{aligned}$$

$$p_1(B_j) = -1 \left(1^2 - \frac{\theta^3}{4} \right) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{\frac{\theta^3}{4}} = \frac{\theta^{3/2}}{2}, \lambda_3 = -\sqrt{\frac{\theta^3}{4}} = -\frac{\theta^{3/2}}{2}$$

$$g(B_j) = \sqrt{\frac{\theta^3}{4}}$$

$$g(B_j) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\theta^3}{4}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\theta^3}{4} < 1 \Leftrightarrow \theta^3 < 4 \Leftrightarrow \theta < \sqrt[3]{4}$$

La méthode de Jacobi converge si $\theta < \sqrt[3]{4}$ (et $\theta \geq 0$)

b) A est régulière? (inversible) $\det(A) = 16 \times 0 + 0 - 2\theta^3 - 2\theta^3 = 8 - 4\theta^3 = 4(4 - \theta^3)$

avec $\theta^3 < 4$ on a $\det(A) > 0$ donc A est inversible.

Aussi : A est tridiagonale et ses coeff. diagonaux sont tous non-nul.

De plus, Jacobi converge, avec $g(B_j) = \frac{\sqrt{\theta^3}}{2}$.

Un critère de convergence nous dit que dans ce cas, Gauss-Seidel converge aussi, et $g(B_{GS}) = g(B_j)^2 = \frac{\theta^3}{4}$.

c) Les méthodes convergent pour les mêmes valeurs de α .

Le rayon spectral de B_{GS} est plus petit que $\rho(B_J)$, donc Gauss-Seidel converge plus rapidement.