

Exercice 3

On considère l'équation non-linéaire $f(x) = 0$, où $f(x) = e^{-x} - x^2$.

- a) Montrer qu'il existe un seul zéro α de f dans $[0, 1]$ et que la méthode de dichotomie (bissection) peut être utilisée afin de le calculer.
- b) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de bissection nécessaire pour approximer α avec une tolérance de 10^{-10} .
- c) Ecrire la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$\phi(x) = x + \frac{1}{4} (e^{-x} - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et montrer sa convergence vers la solution α .

- d) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de point fixe nécessaire pour calculer une solution approchée avec une tolérance de 10^{-10} .

Exercice 3 $f(x) = e^{-x} - x^2$ $x \in [0, 1]$

a) $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$ $f(1) = \underbrace{e^{-1}}_{< 1} - 1 < 0$

La fonction est continue dans $[0, 1]$ (somme de 2 fonctions continues), elle change de signe, donc elle admet au moins un zéro et aussi la méthode de bisection peut être utilisée pour trouver un de ces zéros.

$f'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{< 0} \underbrace{- 2x}_{\leq 0} < 0$, la fonction f est strictement monotone décroissante.

Il ne peut y avoir qu'un zéro possible. Le zéro $\alpha : f(\alpha) = 0$ est unique.

b) $E_k \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \approx 10^{-10} \Rightarrow 2^{k+1} \approx 10^{10} \Rightarrow (k+1)\log 2 \approx 10\log 10$

$k+1 = \frac{10\log 10}{\log 2}$, $k \approx 32,21 \Rightarrow$ il faudra 33 itérations.

$$c) \quad \phi(x) = x + \frac{1}{4} (e^{-x} - x^2) \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{Soit } \alpha: f(\alpha) = 0, \text{ alors } e^{-\alpha} - \alpha^2 = 0$$

$$\text{et } \phi(\alpha) = \alpha + \frac{1}{4} \underbrace{(e^{-\alpha} - \alpha^2)}_{=0} = \alpha$$

le zéro de f est aussi un point fixe de ϕ

Méthode de point fixe: $x_0 \in [0, 1]$, pour $k=0, 1, 2, \dots$ $x_{k+1} = \phi(x_k)$, i.e.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{4} (e^{-x_k} - x_k^2)$$

Si $|\phi'(x)| < 1$ dans $[0, 1]$, alors la méthode du point fixe converge.

$$\phi'(x) = 1 + \frac{1}{4} \underbrace{\left(\underbrace{-e^{-x}}_{\in [-1, -e^{-1}]} - 2x \right)}_{\in [-3, -e^{-1}]} \quad x \in [0, 1]$$

$$\underbrace{\quad}_{\in [-3/4, -\frac{e^{-1}}{4}]}$$

$$\Rightarrow \phi'(x) \in \left[\frac{1}{4}, 1 - \frac{e^{-1}}{4} \right]$$

$$\frac{1}{4} < \phi'(x) < 1 - \frac{1}{4e} < 1.$$

La méthode de point fixe converge vers α pour tout $x_0 \in [0,1]$

$$d) |x^{(k+1)} - \alpha| < C |x^{(k)} - \alpha| \quad \text{où} \quad |\phi'(x)| \leq C < 1$$

$$\text{ici: } C = 1 - \frac{1}{4e} \quad \Rightarrow \quad |x^{(k)} - \alpha| < C^k |x^{(0)} - \alpha|$$

$$\text{si } x^{(0)} \in [0,1] \text{ quelconque, } |x^{(0)} - \alpha| \leq 1$$

$$|x^{(0)} - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$$|x^{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2} C^k \approx 10^{-10}$$

$$k \log C \approx -10 \log 10 + \log 2, \quad k \approx \frac{-10 \log 10}{\log C} = \frac{-10 \log 10}{\log(1 - \frac{1}{4e})} = 238,66$$

Il faut donc 239 itérations pour être sûr de converger avec une tolérance de 10^{-10}

232

$$\phi'(\alpha) = 0 = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(n)}(\alpha)$$

$\phi^{(n+1)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ convergence d'ordre n