

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2e^{-y(t)} & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On note par u_n l'approximation de $y(t_n)$ au temps $t_n = nh$, h étant le pas de discretisation.

1. Ecrire les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Heun pour résoudre numériquement le problème donné.
2. En sachant que la solution exacte est $y(t) = \ln(e^2 + 2t)$, trouver les valeurs de h qui garantissent la stabilité du schéma d'Euler progressif.
3. En général, quel est l'ordre de convergence de la méthode de Heun ? Est-ce que cette méthode est stable ? Calculer l'approximation u_1 qu'on trouve par cette méthode.
4. Réécrire la méthode d'Euler rétrograde sous la forme

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}), \quad \forall n \geq 0,$$

où ϕ est une fonction convenable qui dépend aussi de u_n et de h . Montrer que la suite $\{u_n\}$ est croissante.

5. Afin de trouver l'inconnue u_{n+1} (étant donnés u_n et h), utiliser des itérations de point fixe avec ϕ comme fonction d'itération. Etablir une condition sur h suffisante à garantir que cette méthode de point fixe converge.

Exercise 2.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n=0,1,\dots,N_{h-1}$, $t_n = t_0 + nh = nh$, $h > 0$ $T=10, \frac{T}{h} = \frac{10}{h} = N_h$
 Euler progressif :
$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \\ u_0 = y(t_0) \end{cases} \quad \text{ici } f(t, y) = 2e^{-y}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h 2e^{-u_n} & n = 0, 1, \dots, N_{h-1} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Euler rétrograde :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} &= f(t_{n+1}, u_{n+1}) = 2e^{-u_{n+1}} \\ \begin{cases} u_{n+1} = u_n + h 2e^{-u_{n+1}} \\ u_0 = 2 \end{cases} & \quad (\text{implique}) \quad n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \end{aligned}$$

Heun :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \underbrace{u_n + h f(t_n, u_n)}_{\text{"EP"}}) \right]$$

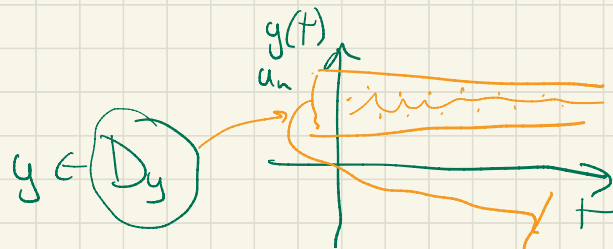
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}h \left[2e^{-u_n} + 2e^{-(u_n + h2e^{-u_n})} \right]$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h e^{-u_n} [1 + e^{-h2e^{-u_n}}] \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad n=0,1,2,\dots, N_h-1$$

2) Stabilité : $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ pour autant que $\frac{\partial f}{\partial y} \in [-\lambda_{\max}, -\lambda_{\min}]$
avec $\lambda_{\max} < \infty$, $\lambda_{\min} > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{-y}, \quad y(t) = \ln(e^2 + 2t)$$

$$-2e^{-y} \in [-\infty, 0)$$



On suppose que u_n ne sera pas loin de $y(t)$. On se rappelle que

$\frac{\partial f}{\partial y}$ sur la projection de $y(t)$. $y(t) \in \left[\frac{\ln(e^2)}{2}, \ln(e^2 + 2\alpha) \right]$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y(t)) \in \left[-2e^{-\ln(e^2 + 2\alpha)}; -2e^{-\frac{\ln(e^2)}{2}} \right]$$

$\lambda_{\min} = 2e^{-\ln(e^2 + 2\alpha)}$, $\lambda_{\max} = 2e^{-\frac{\ln(e^2)}{2}}$

$$h < \frac{2}{\lambda_{\max}} = \frac{2}{2e^2} = e^2$$

La méthode est stable si $h < e^2$ (pour autant que u_n reste dans l'intervalle $[2, \ln(e^2 + 20)]$).

3. Il y a convergence à l'ordre 2 et c'est une méthode conditionnellement stable.

$$u_1 = 2 + h e^{-2} (1 + e^{-2h e^2})$$

$$4. \quad u_{n+1} = u_n + \underbrace{2h e^{-u_n}}_{>0}$$

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{>0}_{>0} > u_n$$

$\{u_n\}_{n=0, \dots, N_h}$ est croissante.

$$\phi(x) = u_n + 2h e^{-x} \quad \text{dépend de } h \text{ et } u_n.$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \text{ pour tout } n,$$

$$s) \quad \phi'(x) = -hze^{-x} \quad (u_n \text{ croissante})$$

$$|\phi'(x)| = hze^{-x} < 1 \quad \forall x \in [u_n, \infty)$$

$$h < \frac{1}{z} e^x \quad \forall x > u_n$$

$$\Rightarrow h < \frac{1}{z} e^{u_n}$$

$$\text{on a } u_0 = 2, \quad u_n \geq 2 \Rightarrow h < \frac{1}{2} e^2$$

(On remarque que dans cette situation, on a un h qui doit être plus petit que la condition de stabilité pour EP)

(Cette méthode avec $\phi(x) = u_n + hze^{-x}$ n'est pas convenable dans cette situation)