Exercice 1
On considère la formule de quadrature suivante :

$$I(f) = \frac{1}{9}[5f(-1) + 16f(\omega) - 3f(1)]$$

pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, où $\omega \in (-1, 1)$.

1. Rappeler la définition de degré d'exactitude r d'une formule de quadrature, puis déterminer la valeur de ω telle que le degré d'exactitude de la formule $I(f)$ donnée soit $r = 2$.
2. On veut intégrer la fonction $f(x) = e^{x^2}$ sur l'intervalle [0,1]. Pour cela, on divise l'intervalle [0,1] en M sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de la même longueur $H = x_k - x_{k_1} = 1/M$, $k = 1, \ldots, M$, avec $x_0 = 0$ et $x_M = 1$, et on considère la formule composite du point milieu (rectangle) $I_{pm}^c(f)$. Soit $I_{pm,(k)}(f)$ la formule simple du point milieu (rectangle) sur le sous-intervalle I_k. En sachant que l'erreur commise sur chaque intervalle est :

$$E_{(k)}^{pm} = \left| \int_{I_k} f(x)dx - I_{pm,(k)}(f) \right| \leq \frac{H^3}{24} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \quad \text{si } f \in C^2,$$

   calculer l'erreur globale $E_{pm}^c = |I(f) - I_{pm}^c(f)|$ introduite par la formule composite du point milieu $I_{pm}^c(f) = \sum_{k=1}^{M} I_{pm,(k)}(f)$ sur l'intervalle [0,1]. Trouver le nombre minimal M de sous-intervalles afin que $E_{pm}^c \leq 10^{-2}$.
3. On a appliqué deux autres formules de quadrature composites $I_a^c(f)$ et $I_b^c(f)$ pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ en supposant que $f \in C^\infty([-1, 1])$.
   Le tableau suivant montre l'erreur commise pour différentes valeurs de la longueur H des sous-intervalles :

H	erreur $I_a^c(f)$	erreur $I_b^c(f)$
1.00	1.547	8.410e–03
0.10	1.580e–02	8.125e–07
0.01	1.580e–04	8.121e–11

   Déduire de façon approximative l'*ordre de convergence* des deux formules $I_a^c(f)$ et $I_b^c(f)$. Quelles formules que vous connaissez pourraient donner les valeurs du tableau ?

Exercice 1

1) Une formule de quadrature est exacte de degré r si pour tout polynome p de degré $\leq r$ $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = J(p)$, où J représente la formule de quadrature.

Rappel : l'intégrale ainsi que la formule de quadrature sont linéaires.

Il suffit donc de vérifier l'égalité $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = I(p)$ pour $p = 1, x, x^2$.

$p = x^2$: $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$$I(p) = \frac{1}{9}\left[5\cdot(-1)^2 + 16\,\omega^2 - 3\cdot 1^2\right] = \frac{1}{9}\left(2 + 16\omega^2\right) \overset{!}{=}$$

$$9\cdot\frac{2}{3} \overset{!}{=} 2 + 16\omega^2 \Rightarrow 16\omega^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{4},\ \underline{\underline{\omega = \mp\frac{1}{2}}}$$

$p = 1$ $\quad \int_{-1}^{1} dx = 2$, $\quad I(p) = \frac{1}{9}\left(5\cdot 1 + 16\cdot 1 - 3\cdot 1\right) = \frac{1}{9}(18) = 2$

$p = x$ $\quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$, $\quad I(p) = \frac{1}{9}\left(5\cdot(-1) + 16\omega - 3\cdot 1\right) = \frac{1}{9}\left(-8 + 16\omega\right)$ $\begin{cases} \omega = -\frac{1}{2} & < 0 \\ \omega = +\frac{1}{2} & = 0 \end{cases}$

Pour $\boxed{\omega = \frac{1}{2}}$ la formule est exacte de degré 2.

2. a) $I_{pm}^{c}(f) = \sum_{k=1}^{M} I_{pm(k)}(f)$, $\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$

$$E_c^{pm}(f) = \left| \int_0^1 f - I_{pm}^c(f) \right| = \left| \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - I_{pm(k)}(f) \right|$$

$$\le \sum_{k=1}^M \left| \int_{I_k} f - I_{pm(k)}(f) \right| \le \sum_{k=1}^M \frac{H^3}{24} \underbrace{\max_{\xi\in I_k} |f''(\xi)|}_{\le \max_{\xi\in[0,1]} |f''(\xi)|}$$

$$\le \frac{H^3}{24}\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)| \underbrace{\sum_{k=1}^M 1}_{M} = \underbrace{M\cdot H}_{1} \frac{H^2}{24} \max_{\xi\in[0,1]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24}\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)|$$

b) $f(x) = e^{x^2}$. $f'(x) = 2x e^{x^2}$ $f''(x) = 2e^{x^2} + (2x)^2 e^{x^2} = \underbrace{e^{x^2}}_{[0,1]:\ \nearrow \text{croissante}} (\underbrace{2+4x^2}_{\nearrow \text{croissante.}})$

$$\max_{\xi\in[0,1]} |f''(\xi)| = f''(1) = e(2+4) = 6e$$

$$E_c^{pm} \simeq 10^{-2} = \frac{H^2}{24}\max|f''(\xi)| = \frac{H^2}{24}\cdot 6e \Rightarrow H^2 = \frac{10^{-2}\cdot 24}{6e} = 0{,}0147 . \quad H = 0{,}12 \quad M \simeq 8{,}24$$

Il faut donc au moins 9 sous-intervalles pour obtenir une erreur $\le 10^{-2}$.

3. $E(H) = CH^d$ erreur d'ordre d en H

$$E\left(\frac{H}{10}\right) = C\frac{H^d}{10^d} = C\cdot 10^{-d} H^d$$

$$E\left(\frac{H}{100}\right) = C\frac{H^d}{100^d} = C\cdot 100^{-d} H^d$$

$$E(H) / E\left(\frac{H}{10}\right) = \frac{CH^d}{C\cdot 10^{-d} H^d} = 10^{+d} \quad \Bigg| \quad \frac{E(H)}{E(H/100)} = \frac{CH^d}{C\cdot 100^{-d}} = 100^d = 10^{2d}$$

I_c^c] $\frac{1,57}{1,58\cdot 10^{-2}} = 10^2 = 10^d \Rightarrow d=2$

$\frac{1,57}{1,58\cdot 10^{-4}} = 10^4 = 10^{2d} \Rightarrow d=2$

L'ordre de convergence est de 2 par rapport à H

Il peut s'agir de la formule composite du point milieu ou du trapèze

I_b^c] $\frac{8,4\cdot 10^{-3}}{8,1\cdot 10^{-7}} \simeq 10^4 = 10^d \Rightarrow d=4$ L'ordre de convergence est 4

$\frac{8,4\cdot 10^{-3}}{8,1\cdot 10^{-11}} \simeq 10^8 = 10^{2d} \Rightarrow d=4$. Il peut s'agir de la formule composite de Simpson.