

1) Donner la définition de différence finie centrée d'une fonction

2) Démontrer le théorème suivant, en complétant les incadrés $\square$

Théorème (Différence finie centrée) Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\boxed{C^3[a,b]}$, $x_0 \in [a,b]$ et $H > 0$.

Alors $\forall 0 < h \leq H$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{t \in [a,b]} |f'''(t)|$$

1) Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in (a,b)$. La différence finie centrée de f en x_0 est donnée par $[D_y]^c = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \left[\text{ou } \frac{f(x_0+\frac{h}{2}) - f(x_0-\frac{h}{2})}{h} \right]$ où $h > 0$.

2) On a besoin de Taylor avec reste à l'ordre 3. Donc $f \in C^3[a,b]$

(a) $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$ pour $\xi \in [x_0, x_0+h]$

(b) $f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\eta)h^3$ pour $\eta \in [x_0-h, x_0]$

(a)-(b) $f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{6}h^3 [f'''(\xi) + f'''(\eta)]$

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \frac{1}{6} h^3 [f'''(\xi) + f'''(\eta)]$$

$\left| \begin{array}{l} -2h f'(x_0) \\ : 2h \end{array} \right|$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = \frac{1}{12} h^2 [f'''(\xi) + f'''(\eta)]$$

$$|f'(x_0) - [D_h]f| \leq \frac{1}{12} h^2 \max_{t \in [a,b]} 2 |f'''(t)| = \frac{1}{6} h^2 \max_{t \in [a,b]} |f'''(t)|$$

