

Soit $\lambda > 0$. Nous sommes intéressé au problème modèle
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -\lambda y(t) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1) Donner la définition de stabilité d'un schéma numérique pour ce problème

A) 2) Écrire le schéma d'Euler progressive et donner la condition de stabilité

3) Démontrer la condition de stabilité

B) Comme A, mais pour Euler rétrograde.

1) Un schéma numérique est absolument stable pour le problème modèle si

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, où $\{u_n\}_{n=0, \dots}$ est la suite du schéma numérique.

A) 1) Méthode d'Euler progressive.

2) Ici: $y(t, x) = -\lambda x$

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad n=0, 1, \dots$$

$$u_{n+1} = u_n + h(-\lambda u_n) = (1 - \lambda h) u_n$$

$$\text{EP: } \begin{cases} u_{n+1} = (1 - \lambda h) u_n \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad n=0, 1, \dots$$

EP est stable si $h < \frac{2}{\lambda}$

3) $u_{n+1} = (1 - \lambda h) u_n = (1 - \lambda h)^2 u_{n-1} = \dots : u_n = (1 - \lambda h)^n u_0$

$$(u_0 \neq 0) \quad u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda h)^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |1 - \lambda h| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - \lambda h < 1 \Leftrightarrow -2 < -\lambda h < 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} -\lambda h < 0 \\ -2 < -\lambda h \end{matrix}$$

Puisque $\lambda > 0$ et $h > 0$: $-\lambda h < 0$ tj. $(\lambda > 0, h > 0)$

$$\Leftrightarrow -2 < -\lambda h \Leftrightarrow h < \frac{2}{\lambda}$$

B) Euler Regel.

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad n=0, 1, \dots$$

$$f(t, x) = -\lambda x$$

2) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h(-\lambda u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow u_{n+1} + \lambda h u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (1 + \lambda h) u_{n+1} = u_n$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{1 + \lambda h} u_n \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

ER est inconditionnellement stable.

3) $u_{n+1} = \frac{1}{1 + \lambda h} u_n = \left(\frac{1}{1 + \lambda h} \right)^2 u_{n-1} = \dots \quad u_n = \left(\frac{1}{1 + \lambda h} \right)^n u_0$

$(u_0 \neq 0) \quad u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \lambda h} \right)^n u_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{1 + \lambda h} \right| < 1 \Leftrightarrow |1 + \lambda h| > 1$

$\lambda > 0, h > 0 \Rightarrow 1 + \lambda h > 1 \Rightarrow |1 + \lambda h| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$\Rightarrow$ on converge vers zéro $\forall h > 0$.

