Série 12

Parcurez et complétez la dernière partie du notebook 6.2.

Mardi, partiellement théorique et partiellement Python

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)}\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in (0, 20), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On veut trouver la solution numérique de l'équation avec la méthode d'Euler rétrograde (implicite), en utilisant N_h sous-intervalles dans $[0, 20]$. Soit $h = 20/N_h$. Considérons les sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, où $t_n = nh$ pour $i = 0, \ldots, N_h - 1$, et désignons par u_n la solution numérique en t_n.

1. Vérifier qu'il existe une unique solution locale dans un voisinage de (t_0, y_0). Qu'en est-il du cas où $y(0) = 0$?
2. Résoudre l'équation en utilisant la fonction `backwardEuler` avec $N_h = 10, 50, 100, 500$ et visualiser la solution dans chaque cas.

   Remarque : Pour résoudre l'équation différentielle $y'(t) = \sqrt{y(t)}\frac{1}{1+t^2}$, il faut définir la fonction

   ```
   f = lambda t, x : numpy.sqrt(x)./(1+t.*t)
   ```

   comme une fonction de t (première variable) et de y (deuxième variable).
3. La solution exacte de l'équation différentielle est

   $$y(t) = (1 + 0.5 \text{ atan}(t))^2.$$

   Ajouter aux graphes du point b) le graphe de la solution exacte.
4. Calculer l'erreur

   $$E_h = \max_n |y(t_n) - u_n|$$

   pour chaque valeur de N_h considérée au point b). Faire le graphe de l'erreur par rapport à N_h en utilisant une échelle logarithmique. Pour cela utiliser la commande `loglog`.

5. Une méthode numérique est d'ordre $p > 0$ s'il existe $C > 0$ tel que

$$E_h \leq Ch^p.$$

Si on suppose $E_h \simeq Ch^p$, on peut trouver une estimation de p avec les résultats du point d), en utilisant $E_{h_1}/E_{h_2} \simeq (h_1/h_2)^p$. Vérifier que, dans le cas de cet exercice, l'estimation donne une valeur de p presque égale à 1 (choisir les valeurs de h_1 et h_2 qui correspondent à $N_h = 50$, $N_h = 500$).

6. Refaire les étapes précédentes pour les methodes d'Euler explicite et vérifier que la méthode est d'ordre 1 .

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = -e^t y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Écrivez la méthode d'Euler progressive pour approcher la solution $y(t)$.

b) Soit $h = \frac{1}{10}$. Calculez la solution approchée au temps $t_1 = t_0 + h$ (où $t_0 = 0$) en utilisant la méthode d'Euler progressive.

c) Déterminez pour quelles valeurs de h la condition de stabilité pour la méthode d'Euler progressive est satisfaite. Vérifiez que la méthode est stable pour la valeur $h = \frac{1}{10}$ utilisée au point b).

d) Refaites les points a-c) pour la méthode d'Euler retrograde

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) &= (-2 + \sin(t))y(t) + e^{-3t} \quad \text{pour } t > 0, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{3}$$

a) Écrivez les schémas d'Euler progressif et rétrograde avec pas de temps h pour l'approximation numérique de $y(t)$.

b) Donnez la condition de stabilité au sens des perturbations pour Euler progressif et Euler retrograde appliqués à ce problème.

c) Soit u_n la valeur de la solution numérique au temps $t = t_n = nh$; si on applique la méthode d'Euler rétrograde, montrez que la solution u_{n+1} au pas t_{n+1} vérifie une équation de la forme suivante :

$$g(u_{n+1}) = 0. \tag{4}$$

Exercice 4

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) &= -\arctan(y(t)) \quad \text{pour } t > 0, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{3}$$

a) Écrivez les schémas d'Euler progressif et rétrograde avec pas de temps h pour l'approximation numérique de $y(t)$.

b) On peut montrer que la solution $y(t)$ reste positive pour $t > 0$, qu'elle est décroissante, et que $y(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Donnez la condition de stabilité au sens des perturbations pour Euler progressif et Euler retrograde appliqués à ce problème.

c) Soit u_n la valeur de la solution numérique au temps $t = t_n = nh$; si on applique la méthode d'Euler rétrograde, montrez que la solution u_{n+1} au pas t_{n+1} vérifie une équation de la forme suivante :

$$g(u_{n+1}) = 0. \tag{4}$$