Série 10 (Corrigé)

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Supposons qu'il existe une constante $0 < C < 1$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A\,.$$

   Démontrez la majoration de l'erreur suivante (remarquez que l'estimation est indépendante de la solution $\mathbf{x}$) :

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A.$$

   Suggestion : estimez $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$ par rapport à $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_A$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}) + (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x})$.

2. On considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionné, avec la matrice de préconditionnement $P = D$, D étant la partie diagonale de A. La méthode est-elle convergente ? Calculez le paramètre α_{opt} optimal.
3. Sans calculer la solution exacte et en choisissant comme vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur (en norme $\|\cdot\|_A$) plus petite que 10^{-8}.

Sol. :

1. On a

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq C\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C^2\|\mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x}\|_A \leq \ldots \leq C^k\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A.$$

Notons que puisque $0 < C < 1$, on a $1 - C > 0$. D'ailleurs, d'après l'inégalité triangluaire on a aussi

$$\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \leq \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_A + \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}\|_A \leq \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_A + C\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$
$$\Longrightarrow \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{1}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A$$

2. *On a vu au cours que la méthode de Richardson stationnaire préconditionné avec paramètre α_{opt} est convergente pourvu que les matrices P et A soient symétriques définies positives, si $\alpha > 0$ est choisi tel que $\alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de $P^{(-1)}A$.*

   Or, P étant une matrice diagonale avec éléments diagonaux > 0, elle est symétrique définie positive. La matrice A est clairement symétrique ; pour vérifier si elle est définie positive aussi, on peut préceder de deux façon :
   - *Critère de Sylvester : pour A symétrique, A est spd si et seulement si les mineurs principaux sont tous positifs. Ici : on obtient dans l'ordre les trois déterminant suivants :*
   $$6 \quad , \quad 36 - 9 = 27 \quad \textit{et} \quad 216 - 54 - 9 - 144 = 9$$
   - *Autrement, on peut calculer les valeurs propes de A : elles sont les racines du polynôme caractéristique suivant*
   $$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 6 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda - 6 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 6 \end{bmatrix} \\ = (\lambda - 6)((\lambda - 6)^2 - 16) - 3 \cdot 3(\lambda - 6) = (\lambda - 6)((\lambda - 6)^2 - 25) \\ = (\lambda - 6)(\lambda - 6 + 5)(\lambda - 6 - 5). \end{aligned}$$
   Donc on trouve :
   $$\lambda_1(A) = 6, \quad \lambda_2(A) = 1, \lambda_3(A) = 11.$$
   Comme $\lambda_i(A) > 0$, A est définie positive.
   Dans ce cas, comme $P = 6I$ (I étant la matrice identité), on a $P^{-1} = \frac{1}{6}I$, donc $P^{-1}A = \frac{1}{6}A$. Par conséquent, les valeurs propres de $P^{-1}A$ sont données par
   $$\lambda_i(\frac{1}{6}A) = \frac{1}{6}\lambda_i(A).$$
   Le spectre (= l'ensemble des valeurs propres) de $P^{-1}A$ est donc
   $$\sigma(P^{-1}A) = \left\{1, \frac{1}{6}, \frac{11}{6}\right\}.$$
   La méthode de Richardson stationnaire préconditionnée est converge si et seulement si $\alpha > 0$ et $\alpha < \frac{12}{11}$.

   Pour calculer le paramètre α_{opt}, il faut utiliser la formule
   $$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)};$$
   en particulier, il faut calculer les valeurs propres de $P^{-1}A$. En utilisant la formule, on calcule $\alpha_{opt} = 1$.

3. *A priori, on ne connait pas la solution $\mathbf{x}$, donc on ne va pas utiliser l'estimation*
   $$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq C^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A,$$

mais plutôt

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A;$$

on imposera donc que k soit suffisament grand pour que $\frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A < 10^{-8}$. Pour ce faire, il faut calculer $\mathbf{x}^{(1)}$. On a $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$ et $\mathbf{r}(0) = \mathbf{b}$. Donc, $\mathbf{x}^{(0)}$ étant nul, on a que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}^{(0)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(0)} = \frac{1}{6}\mathbf{b} \\
&\mathbf{x}^{(1)} = \alpha_{opt}\mathbf{z}^{(0)} = \frac{1}{6}\mathbf{b} \quad \textit{et} \\
&\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A = \|\mathbf{x}^{(1)}\|_A = \frac{1}{6}\|\mathbf{b}\|_A = \frac{1}{6}\sqrt{\mathbf{b}^T A\mathbf{b}} = \frac{1}{6}\sqrt{24} = \frac{2}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

On calcule la constante C. Comme $P^{-1}A$ est symétrique et définie positive, par la théorie on sait que

$$C = \frac{\mathrm{cond}(P^{-1}A) - 1}{\mathrm{cond}(P^{-1}A) + 1},$$

où $\mathrm{cond}(P^{-1}A) = \lambda_{max}(P^{-1}A)/\lambda_{min}(P^{-1}A)$ est le nombre de conditionnement de la matrice $P^{-1}A$. Alors $C = 5/6$.
Il suffit maintenant d'imposer

$$\frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A = \left(\frac{5}{6}\right)^k 2\sqrt{6} \leq 10^{-8}$$

et grâce à la dernière inégalité on estime le k minimal :

$$k \geq \frac{8 + \log_{10}(2\sqrt{6})}{\log_{10} 6/5} \approx 105.39.$$

Exercice 2

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. On considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionné, avec matrice de préconditionnement $P = D$, D étant la partie diagonale de A. Pour quel choix de $\alpha_k = \textit{const}$ la méthode est-elle convergente ? Calculez le paramètre α_{opt} optimal.
2. On considère maintenant la méthode du gradient préconditionné, toujours avec le préconditionneur $P = D$. La méthode est-elle convergente ? Calculez le facteur C_G de réduction de l'erreur tel que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C_{\mathrm{G}}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A.$$

3. Ici la solution est $\mathbf{x}^{ex} = (1,1,1)^T$. Calculez la A-norme de $\mathbf{x}^{ex}$, $\|\mathbf{x}^{ex}\|_A$.

4. Estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer la solution $\mathbf{x}$ du système linéaire donnée par la méthode du gradient préconditionné avec une tolérance $tol = 10^{-2}$ sur l'erreur $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_A$ et une solution de départ $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$. Ensuite, calculez l'erreur en utilisant le même nombre d'itérations avec la méthode du gradient conjugué préconditionné. L'erreur est-elle plus petite que 10^{-2} ? Pourquoi ?

Sol. :

1. *On a vu au cours que la méthode de Richardson stationnaire préconditionnée avec paramètre α est convergente pourvu que la matrices P soit inversible et que les valeurs propres de $P^{-1}A$ soient toutes réelles et positives. Dans ce cas la méthode de Richardson est convergente si et seulement si* $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}$*, où* $\lambda_{\max}$ *est la plus grande valeur propre..*
   On peut calculer les valeurs propres de $P^{-1}A$: ce sont les racines du polynôme caractéristique suivant
$$p_{P^{-1}A}(\lambda) = \det(\lambda I - P^{-1}A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3/5 & 0 \\ -3/5 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}.$$
   Les valeurs propres de $P^{-1}A$ sont donc
$$1, \frac{2}{5}, \frac{8}{5}.$$
   Dans notre cas, P est inversible et les valeurs propres de $P^{-1}A$ sont positives. Ainsi pour que la méthode de Richardson converge, il faut que $0 < \alpha < \frac{5}{4}$.
   Pour calculer le paramètre α_{opt}, il faut utiliser la formule
$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)};$$
   En utilisant la formule, on obtient $\alpha_{opt} = 1$.
2. *Comme $P^{-1}A$ est symétrique et définie positive, par la théorie on sait que*
$$C_G = \frac{\mathrm{cond}(P^{-1}A) - 1}{\mathrm{cond}(P^{-1}A) + 1},$$
   où $\mathrm{cond}(P^{-1}A) = \lambda_{max}(P^{-1}A)/\lambda_{min}(P^{-1}A) = 4$ *est le conditionnement de la matrice $P^{-1}A$. On trouve donc* $C_{\mathrm{G}} = 3/5$.
3. *si on sait que la solution exacte est* $\mathbf{x}^{ex} = (1,1,1)^T$ *on peut calculer* $||\mathbf{x}^{ex}||_A$ *:*
$$||\mathbf{x}^{ex}||_A = \sqrt{(\mathbf{x}^{ex})^T A (\mathbf{x}^{ex})} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{21}$$
4. *Pour la méthode du gradient préconditionnée, nous avons :*
$$||\mathbf{e}^k||_A \leq C_{\mathrm{G}}^k ||\mathbf{e}^0||_A \leq tol.$$

Donc on a :

$$k \log_{10} C_{\mathrm{G}} + \log_{10} ||\mathbf{e}^0||_A \leq \log_{10} 10^{-2}$$

c'est à dire :

$$k \geq \frac{-2 - \log_{10} ||\mathbf{e}^0||_A}{\log_{10} C_{\mathrm{G}}}.$$

Avec $||\mathbf{e}^0||_A = ||\mathbf{x}^{ex} - \mathbf{x}^0||_A = \sqrt{21}$ *enfin on trouve* $k \geq 12$*.*
Pour la méthode du gradient conjugué préconditionnée, nous avons :

$$C_{\mathrm{CG}} = \frac{\sqrt{K(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K(P^{-1}A)} + 1} = \frac{\sqrt{4} - 1}{\sqrt{4} + 1} = 1/3.$$

Selon la theorie on sait que :

$$||\mathbf{e}^k||_A \leq \frac{2C_{\mathrm{CG}}^k}{1 + C_{\mathrm{CG}}^{2k}} ||\mathbf{e}^0||_A,$$

donc pour k=12 on trouve

$$||\mathbf{e}^k||_A \leq 1.72 \cdot 10^{-5}.$$

La méthode du gradient conjugué préconditionnée converge donc plus rapidement car les matrices A et P sont symétriques définies positives et le facteur de réduction de l'erreur est plus petit que celui de la méthode du gradient.

Exercice 3

On considère le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1/2 & 0 \\ \alpha - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ 0 \\ \gamma/2 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ pour que les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi soient convergentes.
2. Calculer les matrices d'itération B_J et B_{GS} des méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel respectivement. Etablir pour quelles valeurs de α et β les méthodes sont convergentes et indiquer quel est le rapport entre leurs vitesses de convergence.
3. Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ pourrait-on appliquer au système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la méthode de Richardson stationnaire ? Dans le cas où $\alpha = \beta$, quel est le choix optimal du paramètre d'accéleration ? En utilisant les même paramètres, déterminer le facteur de réduction de l'erreur correspondant, c'est à dire la constante $C > 0$ t.q.

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_A \leq C^k ||\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}||_A, \quad \forall\, k \geq 0.$$

4. On veut résoudre le système linéaire par une méthode directe : quelle factorisation de la matrice A envisageriez-vous ? Justifier votre réponse.

5. On pose $\alpha = 0$, $\beta = 1$, et $\gamma = 2$. Calculer la factorisation de la matrice A et résoudre le systéme linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sol. :

1. Les deux méthodes sont convergentes si la matrice est strictement diagonale dominante par ligne :

$$\begin{cases} |\alpha| > 1/2 \\ |\alpha - 2| < 1 \\ |\beta| > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < \alpha < 3,\ \beta \neq 0,\ \gamma \in \mathbb{R},$$

2.

$$B_J = I - D^{-1}A = I - \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} A = I - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \alpha - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 2 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{GS} = I - L^{-1}A = I - \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{2-\alpha}{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} A = I - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+2}{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-2}{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La condition est : $\rho(B) = \max|\lambda(B)| < 1$, *donc*

$$\det(B_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow \lambda(B_J) = \left\{0, \pm\sqrt{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\right\},$$

$$\det(B_{GS} - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow \lambda(B_{GS}) = \left\{0, 0, \frac{\alpha-2}{2\alpha}\right\},$$

Donc $\alpha < -2$ *ou* $\alpha > 2/3$ *avec* $\beta \neq 0$, *pour les deux methodes.*
Notons que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, *donc Gauss-Seidel converge plus rapidement que Jacobi. Très probablement avec la motié des itérations : on a que* $\|e_J^{(k)}\| \leq \rho_J^k \|e_J^{(o)}\|$ *et* $\|e_{GS}^{(k)}\| \leq \rho_{GS}^k \|e_{GS}^{(o)}\|$. *Si on commence avec la même donnée initiale et on suppose égalité, nous avons*

$$\|e_J^{(k_J)}\| = \|e_{GS}^{(k_{GS})}\| \Leftrightarrow \rho_J^{k_J} = \rho_{GS}^{k_{GS}} \Leftrightarrow \rho_J^{k_J} = \rho_J^{2k_{GS}} \Leftrightarrow k_J = 2k_{GS}.$$

3. Avec $\alpha = 5/2, \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ *la matrice est symmetrique et* $\min(\lambda) > 0$ *où*

$$\det(A - \lambda I) = (\beta - \lambda)\left(\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + \frac{9}{4}\right) \Rightarrow \lambda = \left\{\beta, \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{13}{16}}\right\}.$$

Richardson :

$$\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{13}{16}} < \beta = \frac{5}{2} < \frac{7}{4} + \sqrt{\frac{13}{16}} \quad \text{donc} \quad \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \frac{4}{7}$$

et

$$C = \frac{K(A) - 1}{K(A) + 1} = \frac{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1}{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + 1} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

4. $\alpha = 5/2, \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ **:** *Cholesky*
   $\alpha \neq 5/2, \beta \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ **:** *LU*

5.
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc,
$$\mathbf{y} = L^{-1}(P\mathbf{b}) = \{0, 2, 1\} \qquad \mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y} = \{2, 4, 1\}\,.$$