Série 10

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Supposons qu'il existe une constante $0 < C < 1$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A\,.$$

   Démontrez la majoration de l'erreur suivante (remarquez que l'estimation est indépendante de la solution $\mathbf{x}$) :

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A.$$

   Suggestion : estimez $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$ par rapport à $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_A$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}) + (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x})$.
2. On considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionné, avec la matrice de préconditionnement $P = D$, D étant la partie diagonale de A. La méthode est-elle convergente ? Calculez le paramètre α_{opt} optimal.
3. Sans calculer la solution exacte et en choisissant comme vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur (en norme $\|\cdot\|_A$) plus petite que 10^{-8}.

Exercice 2

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. On considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionné, avec matrice de préconditionnement $P = D$, D étant la partie diagonale de A. Pour quel choix de $\alpha_k = const$ la méthode est-elle convergente ? Calculez le paramètre α_{opt} optimal.

2. On considère maintenant la méthode du gradient préconditionné, toujours avec le préconditionneur $P = D$. La méthode est-elle convergente ? Calculez le facteur C_G de réduction de l'erreur tel que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C_{\mathrm{G}} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A.$$

3. Ici la solution est $\mathbf{x}^{ex} = (1, 1, 1)^T$. Calculez la A-norme de $\mathbf{x}^{ex}$, $\|\mathbf{x}^{ex}\|_A$.
4. Estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer la solution $\mathbf{x}$ du système linéaire donnée par la méthode du gradient préconditionné avec une tolérance $tol = 10^{-2}$ sur l'erreur $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_A$ et une solution de départ $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Ensuite, calculez l'erreur en utilisant le même nombre d'itérations avec la méthode du gradient conjugué préconditionné. L'erreur est-elle plus petite que 10^{-2} ? Pourquoi ?

Exercice 3

On considère le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1/2 & 0 \\ \alpha - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ 0 \\ \gamma/2 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ pour que les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi soient convergentes.
2. Calculer les matrices d'itération B_J et B_{GS} des méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel respectivement. Etablir pour quelles valeurs de α et β les méthodes sont convergentes et indiquer quel est le rapport entre leurs vitesses de convergence.
3. Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ pourrait-on appliquer au système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la méthode de Richardson stationnaire ? Dans le cas où $\alpha = \beta$, quel est le choix optimal du paramètre d'accéleration ? En utilisant les même paramètres, déterminer le facteur de réduction de l'erreur correspondant, c'est à dire la constante $C > 0$ t.q.

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_A \leq C^k ||\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}||_A, \quad \forall\, k \geq 0.$$

4. On veut résoudre le système linéaire par une méthode directe : quelle factorisation de la matrice A envisageriez-vous ? Justifier votre réponse.
5. On pose $\alpha = 0$, $\beta = 1$, et $\gamma = 2$. Calculer la factorisation de la matrice A et résoudre le systéme linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
