Série 8

Parcourez les chapitres des notebooks Jupyter 4.1 et resolvez les exercices qui y sont proposés (ce sont les mêmes qu'ici).

Exercice 1

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Calculez la factorisation LU de la matrice A avec Python à l'aide du code ci-dessous.

b) Résolvez le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent (Ne plus utiliser Python.)

c) Calculez le déterminant de la matrice A en utilisant sa factorisation LU.

```python
# importing libraries used in this book
import numpy as np
import scipy.linalg as linalg
import pprint

A = np.array([[3, 6, 7],
              [1, 1, 4],
              [2, 4, 8] ])

# LU factorisation with pivoting
P, L, U = linalg.lu(A)

print("A = P L U")
pprint.pprint(P.dot(L.dot(U)) )

print("P:")
pprint.pprint(P)

print ("L:")
pprint.pprint(L)

print ("U:")
pprint.pprint(U)
```

Exercice 2

Les mineurs principaux d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont les déterminants des matrices $A_p = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$, $p = 1, ..., n$.

Critère de Sylvester : une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie positive si et seulement si les mineurs principaux de A sont tous positifs.

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez pour quelles valeurs du paramètre réel $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la matrice A est symétrique définie positive.
2. Soit maintenant $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une méthode directe ; quelle factorisation de la matrice A envisageriez-vous ? Justifiez votre réponse.
3. En considérant $\varepsilon = 2$, vérifier que dans ce cas la matrice A est définie positive et calculer sa factorisation de Cholesky $A = LL^T$.
4. En supposant que $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$, résolvez le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la factorisation de Cholesky calculée au point c).

Référence Python pour la factorisation de Cholesky `scipy.linalg.cholesky` : `https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.15.1/reference/generated/scipy.linalg.cholesky.html`

Exercice 3

Problèmes de précision

Les erreurs d'arrondis peuvent causer des différences importantes entre la solution calculée par la méthode d'élimination de Gauss (MEG) et la solution exacte. Cela arrive si le *conditionnement de la matrice du système est très grand.*

La matrice de Hilbert de taille $n \times n$ est une matrice symétrique définie par

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

On peut construire une matrice de Hilbert de taille n quelconque en utilisant la commande 'A = scipy.linalg.hilbert(n)'. Par exemple, pour $n = 4$, on a :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

On considère les systèmes linéaires $A_n\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n$ ou A_n est la matrice de Hilbert de taille n avec $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots, 20$ tandis que $\mathbf{b}_n$ est choisi de sorte que la solution exacte soit $\mathbf{x}_n = (1, 1, \cdots, 1)^T$.

1. Pour chaque n, calculez le conditionnement de la matrice

2. Résolvez le système linéaire par la factorisation LU et notez $\mathbf{x}_n^{LU}$ la solution calculée.
3. Dessinez le graphique avec le conditionnement obtenu ainsi que l'erreur rélative $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n^{LU}\|/\|\mathbf{x}_n\|$ (où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne d'un vecteur, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}$). Utilisez une échelle logarithmique pour l'axe y.
4. Sur le même graphique, reportez le conditionnement de la matrice A, 'np.linalg.cond(A)'

Répétez la même chose avec la factorisation de Cholesky 'L = cholesky(A, lower=True)' pour $n = 4, 6, 8, 10, 12$. Que se passe-t-il si $n = 14$?