Série 7 (Corrigé)

Mardi prochain : Test en classe

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

On veut approximer l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

en sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

a) Calculer une valeur approchée de cette intégrale en utilisant la formule simple du trapèze sur l'intervalle $[0, 3]$.

b) Pour avoir plus de précision, on divise l'intervalle $[0, 3]$ en N sous-intervalles égaux $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longueur $H = x_k - x_{k-1} = 3/N$, $k = 1, \ldots, N$, avec $x_0 = 0$ et $x_N = 3$, et on considère la formule composite du trapèze.
On peut montrer que l'erreur commise par la formule simple du trapèze $I_{t,(k)}(f) = \dfrac{H}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$ sur l'intervalle I_k est

$$E^t_{(k)} = \left| \int_{I_k} f(x)\, dx - I^c_{t,(k)}(f) \right| \leq \frac{H^3}{12} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \qquad \text{si } f \in C^2.$$

Estimer, en fonction du nombre N de sous-intervalles, l'erreur globale

$$E^c_t = \left| \int_0^1 f(x)\, dx - I^c_t(f) \right|$$

introduite par la formule composite du trapèze $I^c_t(f) = \sum_{k=1}^N I_{t,(k)}(f)$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

c) Trouver le nombre minimal N de sous-intervalles afin que l'erreur globale soit plus petite que 10^{-4}.

Sol. :

a) On constate que

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^3 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^3 e^{-x^2} dx.$$

On applique simplement la formule du trapèze pour obtenir l'estimation de $\int_0^3 e^{-x^2} dx$:

$$I_t(f) = (3-0)\frac{e^0 + e^{-9}}{2} \approx 3\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^3 e^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{3}{2}$$

Ce nombre est négatif ! L'approximation avec la formule du trapèze simple ici est inutile.

b) La formule composite du trapèze est donnée par $I_t^c(f) = \sum_{k=1}^N I_{t,(k)}^c(f)$*. On a donc*

$$\begin{aligned} E_t^c &= \left|\int_0^3 f(x)\,dx - I_t^c(f)\right| = \left|\sum_{k=1}^N \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - I_{t,(k)}(f)\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \left(\frac{H^3}{12} \max_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} |f''(\xi)|\right) \leq N\,\frac{H^3}{12} \max_{\xi\in[0,3]} |f''(\xi)| \\ &= \frac{3^3}{12N^2} \max_{\xi\in[0,3]} |f''(\xi)| = \frac{9}{4N^2} \max_{\xi\in[0,3]} |f''(\xi)|. \end{aligned} \tag{1}$$

c) Etudions

$$\max_{\xi\in[0,3]} |f''(\xi)| = \max_{\xi\in[0,3]} \left|e^{-\xi^2}(-2+4\xi^2)\right|$$

à l'aide de la fonction $g(x) = e^{-x^2}(-2+4x^2)$*.*

$$g'(x) = e^{-x^2}(4x - 8x^3) + 8xe^{-x^2} = e^{-x^2}x(12-8x^2)$$

$g'(x) = 0$ *ssi* $x = 0$ *ou* $x = \pm\sqrt{3/2}$*. Puisque* $g(0) = -2$*,* $g(3) = 34e^{-9} < 2$ *et* $g\left(\pm\sqrt{3/2}\right) = 4e^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{e\sqrt{e}} < 2$*, on a*

$$\max_{\xi\in[0,3]} |g(\xi)| \max_{\xi\in[0,3]} |f''(\xi)| = 2.$$

Donc, en utilisant la formule (3) pour la fonction $f(x) = e^{-x^2}$*, on trouve*

$$E_t^c \leq \frac{9}{4N^2}\cdot 2 = \frac{9}{2N^2}. \tag{2}$$

On tire que

$$E_t^c \leq \frac{9}{2N^2} \leq 10^{-4} \quad\Rightarrow\quad N \geq 3\sqrt{\frac{1}{2\cdot 10^{-4}}} \approx 212.1,$$

c'est-à-dire 213 *sous-intervalles de* $[0,3]$ *son nécessaires.*

Exercice 2

On considère une fonction $f \in C^2([a,b])$.

a) Soient $p_1, p_2 \in [a,b]$, $p_1 < p_2$; à l'aide de l'expansion de Taylor autour du point $p = (p_1+p_2)/2$, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(p) + (x-p)f'(p) + \frac{1}{2}(x-p)^2 f''(\eta(x)),$$

où $\eta(x)$ est compris entre x et p, montrer l'estimation suivante :

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(x)dx - (p_2-p_1)f(p)\right| \leq \frac{(p_2-p_1)^3}{24} \max_{x\in[p_1,p_2]} |f''(x)|.$$

b) Considérer la subdivision de $I = [a,b]$ en M sous-intervalles équirepartis $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longeur $H = (b-a)/M$, où $x_k = a + kH$, $k = 1, \dots, M$.
Soit
$$I^c_{mp}(f) = H \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k),$$
la valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la formule composite du point milieu, où $\overline{x}_k = (x_{k-1}+x_k)/2$. En appliquant le résultat du point a) à chaque sous-intervalle I_k montrer l'estimation de l'erreur suivante :
$$\left| \int_a^b f(x)dx - I^c_{mp}(f) \right| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| .$$

c) Soit $f(x) = e^{x^2}$; on veut calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Calculer le nombre de sous-intervalles nécessaires pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale avec une erreur de 10^{-6} avec la formule composite du point milieu.

Sol. :

a) En calculant l'intégrale de $f(x) - f(p)$ par rapport à x, à l'aide de l'expansion de Taylor on obtient :
$$\int_{p_1}^{p_2} f(x)dx - (p_2 - p_1)f(p) = \frac{1}{2} \int_{p_1}^{p_2} (x-p)^2 f''(\eta(x))dx,$$
d'où l'estimation cherchée, vu que
$$|f''(\eta(x))| \leq \max_{x\in[p_1,p_2]} |f''(x)| , \qquad \int_{p_1}^{p_2} (x-p)^2 dx = \frac{(p_2-p_1)^3}{12}.$$

b) On a :
$$\left| \int_a^b f(x)dx - I^c_{mp}(f) \right| \leq \sum_{k=1}^{M} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - Hf(\overline{x}_k) \right| ,$$
et grâce au point a) (on choisit $p_1 = x_{k-1}$ et $p_2 = x_k$, de façon telle que $p = \overline{x}_k$) :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - Hf(\overline{x}_k) \right| &\leq \sum_{k=1}^{M} \frac{H^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \\ &= M\frac{H^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| .\end{aligned}$$

c) Comme $\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| < 20$, on pose
$$\frac{20}{24} H^2 \leq 10^{-6},$$
donc il faut utiliser $H \leq \sqrt{\frac{6}{5}}\, 10^{-3}$, c.-à.-d. $M \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot 10^3$ sous-intervalles.

Exercice 3

On veut calculer numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = e^{-x/5}$ sur l'intervalle $[0, 5]$. Pour cela, on divise l'intervalle $[0, 5]$ en m sous-intervalles égaux et on considère les formules composites du trapèze et de Simpson.

a) En sachant que l'erreur commise par la formule du trapèze I_i^T sur un intervalle $[x_i, x_i + h]$ de longueur h est

$$E_i^T = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t)\,dt - I_i^T(f) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(2)}(\xi)|$$

et que l'erreur commise par celle de Simpson est

$$E_i^S = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t)\,dt - I_i^S(f) \right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(4)}(\xi)| \,,$$

où f est une fonction suffisamment régulière, calculer les erreurs globales E_h^T et E_h^S introduites par les deux formules composites correspondantes I_h^T et I_h^S en fonction du nombre de sous-intervalles.

b) Trouver le nombre minimal m de sous-intervalles pour que l'erreur globale soit $\leq 10^{-4}$ dans les deux cas.

Sol. :

a) Il suffit de se rappeler que $I_h^T(f) = \sum_{i=1}^m I_i^T(f)$ et $I_h^S(f) = \sum_{i=1}^m I_i^S(f)$ où I_h^T et I_h^S indiquent respectivement les formules composites du trapèze et de Simpson. On a donc

$$\begin{aligned} E_h^T &= \left| \int_0^5 f(x)\,dx - I_h^T \right| = \left| \sum_{i=1}^m \left(\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx - I_i^T(f) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(2)}(\xi)| \right) \leq m\, \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [0,5]} |f^{(2)}(\xi)| \\ &\leq \frac{5^3}{12m^2} \max_{\xi \in [0,5]} |f^{(2)}(\xi)| \end{aligned} \tag{3}$$

et

$$\begin{aligned} E_h^S &= \left| \int_0^5 f(x)\,dx - I_h^S \right| = \left| \sum_{i=1}^m \left(\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx - I_i^S(f) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(4)}(\xi)| \right) \leq m\, \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [0,5]} |f^{(4)}(\xi)| \\ &\leq \frac{5^5}{90m^4} \max_{\xi \in [0,5]} |f^{(4)}(\xi)| \,. \end{aligned} \tag{4}$$

b) On voit que

$$\max_{\xi \in [0,5]} |f^{(2)}(\xi)| = \max_{\xi \in [0,5]} \left| \frac{e^{-\xi/5}}{25} \right| = \left. \frac{e^{-\xi/5}}{25} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{25} \,,$$

et

$$\max_{\xi \in [0,5]} |f^{(4)}(\xi)| = \max_{\xi \in [0,5]} \left| \frac{e^{-\xi/5}}{625} \right| = \left. \frac{e^{-\xi/5}}{625} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{625} \,.$$

Maintenant, en utilisant les formules (3) et (4) sur la fonction $f(x)$, et $h = \frac{5}{m}$ on trouve

$$E_h^T \leq \frac{125}{12m^2}\,\frac{1}{25} = \frac{5}{12m^2}\,, \qquad E_h^S \leq \frac{625}{18m^4}\,\frac{1}{625} = \frac{1}{18m^4}\,. \tag{5}$$

Donc, avec la formule composite du trapèze on a :

$$E_h^T \leq \frac{5}{12m^2} \leq 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad m \geq \sqrt{\frac{5}{12 \cdot 10^{-4}}} \approx 65\,,$$

tandis qu'avec la formule composite de Simpson :

$$E_h^S \leq \frac{1}{18m^4} \leq 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad m \geq \sqrt[4]{\frac{1}{18 \cdot 10^{-4}}} \approx 5\,.$$