Série 7

Mardi prochain : Test en classe

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

On veut approximer l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

en sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

a) Calculer une valeur approchée de cette intégrale en utilisant la formule simple du trapèze sur l'intervalle $[0,3]$.

b) Pour avoir plus de précision, on divise l'intervalle $[0,3]$ en N sous-intervalles égaux $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longueur $H = x_k - x_{k-1} = 3/N$, $k = 1, \ldots, N$, avec $x_0 = 0$ et $x_N = 3$, et on considère la formule composite du trapèze.
On peut montrer que l'erreur commise par la formule simple du trapèze $I_{t,(k)}(f) = \dfrac{H}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))$ sur l'intervalle I_k est

$$E^t_{(k)} = \left| \int_{I_k} f(x)\, dx - I^c_{t,(k)}(f) \right| \leq \frac{H^3}{12} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \qquad \text{si } f \in C^2.$$

Estimer, en fonction du nombre N de sous-intervalles, l'erreur globale

$$E^c_t = \left| \int_0^1 f(x)\, dx - I^c_t(f) \right|$$

introduite par la formule composite du trapèze $I^c_t(f) = \sum_{k=1}^N I_{t,(k)}(f)$ sur l'intervalle $[0,3]$.

c) Trouver le nombre minimal N de sous-intervalles afin que l'erreur globale soit plus petite que 10^{-4}.

Exercice 2

On considère une fonction $f \in C^2([a,b])$.

a) Soient $p_1, p_2 \in [a,b]$, $p_1 < p_2$; à l'aide de l'expansion de Taylor autour du point $p = (p_1 + p_2)/2$, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(p) + (x-p)f'(p) + \frac{1}{2}(x-p)^2 f''(\eta(x)),$$

où $\eta(x)$ est compris entre x et p, montrer l'estimation suivante :

$$\left| \int_{p_1}^{p_2} f(x)dx - (p_2 - p_1)f(p) \right| \leq \frac{(p_2-p_1)^3}{24} \max_{x\in[p_1,p_2]} |f''(x)| .$$

b) Considérer la subdivision de $I = [a,b]$ en M sous-intervalles équirepartis $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longeur $H = (b-a)/M$, où $x_k = a + kH$, $k = 1, \dots, M$.

Soit

$$I^c_{mp}(f) = H \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k),$$

la valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la formule composite du point milieu, où $\overline{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$. En appliquant le résultat du point a) à chaque sous-intervalle I_k montrer l'estimation de l'erreur suivante :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I^c_{mp}(f) \right| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| .$$

c) Soit $f(x) = e^{x^2}$; on veut calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Calculer le nombre de sous-intervalles nécessaires pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale avec une erreur de 10^{-6} avec la formule composite du point milieu.

Exercice 3

On veut calculer numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = e^{-x/5}$ sur l'intervalle $[0,5]$. Pour cela, on divise l'intervalle $[0,5]$ en m sous-intervalles égaux et on considère les formules composites du trapèze et de Simpson.

a) En sachant que l'erreur commise par la formule du trapèze I_i^T sur un intervalle $[x_i, x_i + h]$ de longueur h est

$$E_i^T = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t)\,dt - I_i^T(f) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi\in[x_i,x_i+h]} |f^{(2)}(\xi)|$$

et que l'erreur commise par celle de Simpson est

$$E_i^S = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t)\,dt - I_i^S(f) \right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{\xi\in[x_i,x_i+h]} |f^{(4)}(\xi)| \,,$$

où f est une fonction suffisamment régulière, calculer les erreurs globales E_h^T et E_h^S introduites par les deux formules composites correspondantes I_h^T et I_h^S en fonction du nombre de sous-intervalles.

b) Trouver le nombre minimal m de sous-intervalles pour que l'erreur globale soit $\leq 10^{-4}$ dans les deux cas.
