Série 6

Pour mardi : apprentissage vidéos chapitres 3.4 (environ 40 minutes de travail)

Mardi prochain : résolvez les exercices Python qui se trouvent dans cette série

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

On considère une fonction $f(x)$, $x \in [a, b]$.

1. Écrivez le polynôme quadratique interpolant $f(x)$ dans les nœuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$ en utilisant la base de Lagrange.
2. Combien valent les intégrales $\int_a^b \varphi_k$ pour $k = 0, 1, 2$? Utilisez une formule de quadrature appropriée pour calculer !
3. On veut approcher l'intégrale de $f(x)$ par l'intégration de l'interpolation quadratique. Écrivez l'intégrale exacte de l'interpolant. Quelle formule d'intégration numérique pouvez-vous reconnaître ?

Exercice 2

Soit g une fonction continue définie sur l'intervalle $[-1, 1]$. On choisit trois nœuds d'interpolation nommés x_1, x_2 et x_3 tels que $x_1 = -1$, $x_2 = \beta$ et $x_3 = 1$, où β est un nombre réel donné tel que $|\beta| < 1$. Pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 g(x)dx$, on considère la formule de quadrature suivante :

$$I_2(g) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j\, g(x_j) = \alpha_0\, g(-1) + \alpha_1\, g(\beta) + \alpha_2\, g(1)$$

a) Trouvez les poids α_0, α_1 et α_2 en fonction de β tels que la formule de quadrature soit exacte de degré 2.

b) Trouvez ensuite β tel que $I_2(p) = \int_{-1}^1 p(x)dx$ pour tout polynôme p de degré 3.

c) Reécrivez cette formule sur l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ pour intégrer une fonction continue f définie sur cet intervalle. Quelle formule d'intégration reconnaissez-vous ?

Exercice 3

Définition. Le degré d'exactitude d'une méthode d'intégration est donné par la valeur maximale de r pour laquelle la méthode intègre exactement tout polynôme de degré inférieur ou égal à r.

a) D'après la définition ci-dessus, déterminez le degré d'exactitude de la formule du rectangle (point milieu) simple, c-à-d sur un seul intervalle en prenant comme fonctions tests pour l'intégrale $I = \int_a^b f(x)$ les polynômes : $1, x, x^2, x^3, \ldots$.

b) On considère maintenant le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx,$$

où m et n sont deux valeurs entières $m, n \geq 1$. Écrivez la méthode du rectangle simple pour approcher I. Pour quelles valeurs de n et m cette formule donne la valeur exacte de I ?

Python

Exercice 4

On considère le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

où $f(x)$ est une fonction continue sur $[0, 1]$.

1. Ecrivez une fonction `midpoint` qui implémente la formule composite du rectangle (point milieu) pour l'approximation de l'intégrale ci-dessus. Pour permettre le choix d'un intervalle d'intégration de la forme $[a, b]$, le nombre de sous-intervalles N et la fonction $f(x)$, définie par la commande `f = lambda x : ...` utilisez la structure suivante :

```
def midpoint( a, b, M, f ) :
    # [a,b] : inteval
    # M : number of subintervals
    # f : fonction to integrate using the midpoint rule
```

2. Testez le code en considérant la fonction $f(x) = x^2$ et $M = 10$. Tracer ensuite le graphe de l'erreur $|I(f) - I_{pm}^c(f)|$ en fonction de M (utilisez à cette fin la commande `plt.xscale('log'); plt.yscale('log')`), en choisissant $a = 0$, $b = 1$, et $M = 10^1, 10^2, 10^3, \ldots 10^5$. Quel est l'ordre de convergence de la formule composite du rectangle par rapport à $H = (b-a)/M$? Donnez une interprétation des résultats d'après la théorie.

3. Modifiez le code du point a) pour permettre le calcul de l'intégrale avec la formule composite du trapèze. Tracer le graphe de l'erreur $|I(f) - I_t^c(f)|$ pour les mêmes valeurs de M. Comparez les résultats avec ceux obtenus au point b).

```
  def trapeziodal( a, b, N, f ) :
    # [a,b] : inteval
    # N : number of subintervals
    # f : fonction to integrate using the trapezoidal rule
```

Exercice 5

On considère la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dans $C^0([a, b])$; on est intéressé à approcher l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

1. Ecrivez une fonction `Simpson` qui implémente la formule composite de Simpson pour l'approximation de l'intégrale ci-dessus. Utilisez la structure suivante :

```
def Simpson( a, b, N, f ) :
    # [a,b] : inteval
    # N : number of subintervals
    # f : fonction to integrate using the Simpson rule
```

2. Testez ensuite pour quels monômes $f(x) = x^d$ cette formule intègre exactement la fonction, pour $d = 0, 1, ...$ sur l'intervalle $[1, 4]$, avec $N = 1$ et ensuite $N = 10$.
3. Vérifiez numériquement pour quelques polynômes que la fonction ainsi écrite est linéaire en f pour $N = 10$.

Suggestion : En utilisant une fonction 'lambda' il est possible de décider le paramètre d d'un monôme à un moment ultérieur :

```
monomial = lambda x :  x**d
```

Exercice 6

On considère la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dans $C^0([a, b])$; on est intéressé à approcher l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Plus précisément on prend $f(x) = \sin(\frac{7}{2}\,x) + e^x - 1$ avec $a = 0$ et $b = 1$ ($f \in C^\infty([a, b])$) et on peut calculer $I(f) = \frac{2}{7}\,(1 - \cos(\frac{7}{2})) + e - 2$.

1. Calculez une approximation de l'intégrale en utilisant les formules du rectangle, du trapèze et de Simpson *simples*, c-à-d avec un seul intervalle.
2. Calculez une approximation de l'intégrale en utilisant les fonctions `midpoint`, `trapezoidal` et `simpson` (déjà codées) avec $N = 10$ sous-intervalles de même taille. On notera les valeurs approchées de l'intégrale $I^c_{mp}(f)$, $I^c_t(f)$, and $I^c_s(f)$, respectivement.
3. Répétez le point 2. avec $N = 2^k$ pour $k = 2, \ldots, 7$ et calculez les erreurs $E^c_{mp}(f) := |I(f) - I^c_{mp}(f)|$, $E^c_t(f) := |I(f) - I^c_t(f)|$, et $E^c_s(f) := |I(f) - I^c_s(f)|$. Dessinez les erreurs en fonction de $H = (b-a)/N$ sur une échelle logarithmique sur les deux axes. Quel est l'ordre de convergence de ces méthodes ? Est-ce en accord avec la théorie ? Motivez votre réponse.
4. On prend maintenant $f(x) = x^d$, $a = 0$ et $b = 1$, avec $d \in \mathbb{N}$. L'intégrale de f vaut $I(f) = 1/(d + 1)$. Vérifiez numériquement les degrés d'exactitude de chacune des formules de quadrature du point 1. Pour cela, il faut choisir plusieurs valeurs de $d = 0, 1, 2, \ldots$. Motivez votre réponse.

Exercice 7

On considère, sur l'intervalle $[-1,1]$, la fonction f suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On peut définir une telle fonction en utilisant la commande

```
f = lambda x :  np.exp(x)*(x<=0) + (1)*(x>0)
```

1. Utilisez 1000 points équirépartis dans l'intervalle $[-1,1]$ pour afficher la fonction f (utilisez la commande `axis` pour recadrer l'image).
2. On s'intéresse à présent à l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$. On peut calculer la valeur de I analytiquement et on trouve $I = 2 - \frac{1}{e} \cong 1.6321$. Calculez des valeurs approchées de I en considérant les formules du point milieu, du trapèze et de Simpson avec $N = 1, 9, 99, 999$ où N est le nombre de sous-intervalles de formules composites. Utilisez les fonctions `midpoint`, `trapezoidal` et `simpson` (déjà codées) .
3. Reportez les erreurs calculées au point (b) dans un graphe montrant l'erreur en fonction de H avec des échelles logarithmiques (commande `loglog`).
4. Estimez, à partir des graphes obtenus au point précédent l'ordre de chacune des méthodes. Comparez-les avec les ordres donnés au cours. Y a-t-il des différences ? Pourquoi ? (Regardez les dérivées de f).
5. Pourquoi obtient-on de bien meilleurs résultats pour la méthode de Simpson avec un nombre pair d'intervalles qu'avec un nombre impair (essayez avec $N = 99$ et $N = 100$) ?
6. Refaites l'exercice avec $N = 2, 10, 100, 1000$.