Série 5

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

Nous avons des mesures $y_0, y_1, \ldots, y_n$ correspondant à des points $x_0, x_1, \ldots x_n$. Montrer que la droite de régression $y = a_0 + a_1 x$, qui approche au sens des moindres carrés ces données, passe par le baricentre $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage de points (x_i, y_i) :

$$\bar{y} = a_0 + a_1 \bar{x}, \qquad \text{où } \bar{x} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i.$$

Exercice 2

On considères la rèaction chimique suivante :

$$OH_{(g)} + Cl\,C\,H_2\,C\,H_2\,Cl_{(g)} \rightarrow H_2O_{(g)} + Cl\,C\,H\,H\,C\,H_2\,Cl_{(g)}. \tag{1}$$

Pour ètudier la vitesse de cette rèaction chimique considèrer la loi de Arrhenius :

$$k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}, \tag{2}$$

où $R = 8.3144621$ J K^{-1} mol^{-1} est la constante universelle des gaz parfaits. Soient les donnèes suivantes (Tableau 1) qui correspondent aux valeurs expèrimentales de T et k :

k [dm^3 mol^{-1} s^{-1}]	1.24	1.32	1.81	2.08	2.29	2.75
T [K]	292	296	321	333	343	363

Table 1 – Valeurs expèrimentales de T et k.

Dèterminer les valeurs des constantes A (facteur prè-exponentiel) et E_a (l'ènergie d'activation) de la loi d'Arrhenius à l'aide de la mèthode des moindres carrès.

Conseil : Il faut d'abord prendre le logarithme de (2) *pour obtenir une relation linèaire entre* $\ln A$ *et* E_a. *Les calculs se font à l'aide de Python.*

Python

Exercice 3

Depuis https://hsso.ch/fr/2012/b/14 téléchargez les données de la population suisse dans le fichier `Data/PopulationSuisse.csv` :

Année	1860	1870	1880	1888	1900	1910	1920
Population	2506784	2654394	2924702	2917754	3315443	3753293	3880320
Année	1930	1941	1950	1960	1970	1980	1990
Population	4066400	4265703	4714992	5429061	6269783	6365960	6873687

Approximez l'évolution de la population avec un polynôme de degré $n = 1, 2, 3, 7$.

Ensuite faites l'hypothèse de croissance exponentielle de la population, c'est-à-dire $p(x) = Ce^{a_1 x}$ où C et a_1 sont des paramètres. Comment utiliser l'approximation polynômiale dans ce contexte ? Calculez les valeurs de C et a_1. *Indications : Ici la population est positive, donc $C > 0$. On peut donc remplacer C avec e^{a_0} dans $p(x)$. Un polynome $a_0 + a_1 x$ apparait. Comment le retrouver dans les données ?*

Voici quelques commandes utile en Python

```
import pandas as pd

# Read data from file 'PopulationSuisse.csv'
data = pd.read_csv("Data/PopulationSuisse.csv")
# Preview the first 5 lines of the loaded data
data.head()

# load the data into numpy arrays :
x = data['Annee'].to_numpy()
y = data['Population'].to_numpy()
```

Attention, remplacer `data['Annee']` *par* `data['Année']`*. LaTeX ne permet pas de le faire dans ce code ...*

Exercices supplémentaires

Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \sin(x).$$

Remarquez que cette fonction est la somme d'une fonction linéaire $f_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ et d'une perturbation périodique $f_p(x) = \sin(x)$. Calculer la droite de régression qui approche f lorsque on prend les échantillons $x_i = 2i\pi/3$, $y_i = f(x_i)$, pour $i = 0, 1, 2, 3$. Tracer un graphe qualitatif de la fonction f, de la droite f_0 et de la droite de régression (en utilisant éventuellement le résultat du point a). Est-ce que cette droite coïncide avec f_0 ? Discutez brièvement les différences.

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = \sin(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 3\pi]$.

1. En utilisant Python, calculer le polynôme d'interpolation $\Pi_n f$ de la fonction $f(x) = \sin(x)$ pour une distribution de nœuds uniforme dans $[0, 3\pi]$, dans les cas $n = 1, \ldots, 5$

(n étant le degré du polynôme d'interpolation). Comparer graphiquement le résultat avec la fonction donnée [1].

2. Evaluer l'erreur $\max_{x\in[0,3\pi]} |\sin(x) - \Pi_n \sin(x)|$ et visualiser le graphe de E_n en fonction de n.
3. En observant que $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 3\pi]$, $\forall n$, comparer l'erreur obtenue au point b) avec l'estimation théorique donnée au cours :

$$\max_{x\in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \,.$$

4. En utilisant la fonction `PiecewiseLinearInterpolation` calculer le polynôme linéaire par intervalles $\Pi_1^H \sin(x)$, sur N sous-intervalles de longueur $H = 3\pi/N$. Considérer $N = 2, 4, 6, 8, 10$ et comparer graphiquement les résultats obtenus avec la fonction donnée[1].
5. Evaluer l'erreur $\max_{x\in[0,3\pi]} |E_n f(x)| = \max_{x\in[0,3\pi]} |\sin(x) - \Pi_1^H \sin(x)|$ et visualiser le graphe de $\max_{x\in[0,3\pi]} |E_n f(x)|$ en fonction du nombre d'intervalles N.

Exercice 6

Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$. On divise l'intervalle $[0, 5]$ en M sous-intervalles de longueur constante $H = 5/M$. Soit $\Pi_1^H f(x)$ le polynôme par morceaux de degré 1 sur chaque sous-intervalle interpolant f.

a) Majorer l'erreur $E_H = \max_x |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$ en fonction de H.

b) Trouver le nombre M de sous-intervalles nécessaires pour que $E_H \leq 0.5 \cdot 10^{-6}$.

1. Utiliser au moins 100 points pour les représentations.