Série 4 (Corrigé)

Mardi prochain : Test en groupe

Pour vendredi prochain : Apprentissage Vidéos du notebook 2.5 (environ 30min de travail), sur Switch tube chapitre 2.9

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

1. On considère la fonction $f(x) = \sin(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_2 f(x)$ de degré 2 interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = 3/2\pi$.
2. Calculer le polynôme de Lagrange $\Pi_3 f(x)$ de degré 3 interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$ et $x_3 = 3$. Quelle est sa valeur en $x = 1.5$?
3. Répéter les points a) et b) en utilisant la fonction $g(x) = 2x^2 + 3x + 9$. Que remarquez-vous ?
4. On connaît les valeurs d'une fonction $g(x)$ aux noeuds $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 3$:
$$g(0) = 3, \quad g(0.5) = 1, \quad g(1.5) = 0, \quad g(3) = 6 \;.$$
Estimer sa valeur en $x = 2$ en interpolant g par un polynôme de degré 3 aux points $x = 0,\ 0.5,\ 1.5,\ 3$.

Sol. :

1. *On peut calculer le polynôme $\Pi_2 f(x)$ en utilisant les polynômes de la base de Lagrange associée aux nœuds x_0, x_1, x_2.*
Base de Lagrange :
$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{2}{3\pi^2}x^2 - \frac{5}{3\pi}x + 1\\
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{3}{\pi}x\\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{4}{3\pi^2}x^2 - \frac{4}{3\pi}x
\end{aligned}$$
Le polynôme cherché est donc
$$\Pi_2 f(x) = f(0)\varphi_0(x) + f(\pi)\varphi_1(x) + f(3\pi/2)\varphi_2(x) = \frac{4}{3\pi}x - \frac{4}{3\pi^2}x^2.$$

2. *On peut construire les polynômes de la base de Lagrange et utiliser la même démarche qu'au point a). On note* $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$ *et* $x_3 = 3$. *On a alors*

$$\varphi_0(x) = -\frac{4}{9}(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})(x-3) \qquad \varphi_1(x) = \frac{4}{5}x(x-\frac{3}{2})(x-3)$$
$$\varphi_2(x) = -\frac{4}{9}x(x-\frac{1}{2})(x-3) \qquad \varphi_3(x) = \frac{4}{45}x(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})$$

Finalement, le polynôme interpolant est

$$\begin{aligned}\pi_3 f(x) &= \sin(0)\,\varphi_0 + \sin\left(\frac{1}{2}\right)\,\varphi_1 + \sin\left(\frac{3}{2}\right)\,\varphi_2 + \sin(3)\,\varphi_3 \\ &= \frac{x}{45}\left[36\sin\left(\frac{1}{2}\right)(x-\frac{3}{2})(x-3) - 20\sin\left(\frac{3}{2}\right)(x-\frac{1}{2})(x-3) + 4\sin(3)\,(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})\right].\end{aligned}$$

Puisque $x = 1.5$ *est un point d'interpolation, on a que* $\pi_3(1.5) = f(1.5) = \sin\left(\frac{3}{2}\right)$.

3. *Il suffit d'observer que* $f(x)$ *est un polynôme de degré deux et donc on a* $\Pi_2 f(x) = f(x)$ *et* $\Pi_3 f(x) = f(x)$.
4. *On peut réutiliser la base de Lagrange obtenue au point b) et ainsi*

$$\begin{aligned}\Pi_3 g(x) &= g(0)\varphi_0(x) + g(0.5)\varphi_1(x) + g(1.5)\varphi_2(x) + g(3)\varphi_3(x) \\ &= 3\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + 6\varphi_3(x) \\ &= (2x-3)(x-1).\end{aligned}$$

Finalement, $\Pi_3 g(2) = 1$.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f(x) = e^{2x}, \qquad x \in [0,1].$$

Soit N un nombre entier, $H = 1/N$, et $\Pi_1^H f$ le polynôme composite linéaire par morceaux qui interpole la fonction f aux nœuds $x_i = iH$, $i = 0, 1, \dots N$.

a) Calculer le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation $E_1^H(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$ soit inférieure à 10^{-4}.

b) Soit $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole f aux nœuds $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots n$. Est-ce que l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$? Est-ce que le nombre de nœuds nécessaires pour que l'erreur soit plus petite que 10^{-4} est du même ordre de grandeur que celui du point a) ? Justifier vos réponses.

Sol. :

a) L'estimation de l'erreur étant

$$E_1^H(f) \le \frac{H^2}{8} \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = \frac{1}{8N^2} \max_{x\in[0,1]} |4e^{2x}| = \frac{e^2}{2N^2},$$

il faudra imposer

$$N^2 > \frac{e^2}{2} \cdot 10^4 \quad \Rightarrow N > 100\frac{e}{\sqrt{2}} \simeq 192.$$

b) L'estimation de l'erreur étant

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} \max_{x\in[0,1]} |f^{(n+1)}(x)| = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} \max_{x\in[0,1]} |2^{n+1}e^{2x}|$$
$$= \frac{e^2}{4(n+1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1}$$

on voit que $\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0$, *car* $\frac{e^2}{4(n+1)} \to 0$ *et* $\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \to 0$.
Le nombre n *de nœuds nécessaires pour que l'erreur ne soit pas plus grande que* 10^{-4} *sera beaucoup plus petit que* N *; par exemple avec* $n = 10$ *on a*

$$E_n(f) < \frac{e^2}{44} 5^{-11} \ll 10^{-4}.$$

Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in I = [0,1]$$

Déterminer le nombre minimal d'intervalles uniformes pour que le polynôme linéaire par morceaux qui interpole la fonction par intervalles donne une erreur $\leq 10^{-5}$. ***Sol. :*** *Soit* N *le nombre de sous-intervalles de* $I = [0,1]$ *de longueur* $h = 1/N$. *On rappelle que pour l'erreur d'interpolation linéaire par intervalles, on peut fournir l'estimation suivante :*

$$\max_{0\leq x\leq 1} |\Pi_h^1 f(x) - f(x)| \leq \frac{\max_{0\leq x\leq 1} |f^{(2)}|}{8} h^2.$$

On a

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f^{(2)}| = \max_{0\leq x\leq 1} \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| \leq 2$$

Pour satisfaire la condition demandée par l'exercice on doit donc prendre

$$h^2 \leq 4 \cdot 10^{-5}$$

et donc $N \geq \sqrt{0.25 \cdot 10^5} \sim 159$.

Exercice 4

On se donne la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), \qquad x \in I = [0,1].$$

1. Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction aux nœuds équidistribués $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f)$ sur l'intervalle I en fonction du degré n du polynôme et étudier son comportement quand $n \to \infty$.
2. Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$. *(Suggestion : essayer pour* $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$.*)*

Sol. :

1. *En général, pour estimer l'erreur d'interpolation d'une fonction continue par un polynôme de degré n dans le cas de nœuds équidistribués sur l'intervalle $[a, b]$, on peut utiliser l'inégalité*

$$E_n(f) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - \Pi_n f(x)| \le \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{(n+1)} \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)| \,, \qquad (1)$$

où $(b-a)$ est la longueur de l'intervalle d'interpolation. Pour la fonction $f(x) = sin\left(\frac{x}{3}\right)$, on a que

$$f^{(1)} = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right), \qquad f^{(2)} = -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{x}{3}\right), \qquad \ldots$$

et donc on obtient immédiatement

$$\max_{0 \le x \le 1} |f^{(n+1)}(x)| \le \frac{1}{3^{(n+1)}}. \qquad (2)$$

Dans ce cas, on a l'estimation suivante :

$$E_n(f) = \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - \Pi_n f(x)| \le \frac{1}{4(n+1)(3n)^{(n+1)}}$$

qui tend vers zéro quand $n \to \infty$.

2. *On doit satisfaire la condition suivante :*

$$\frac{1}{4(n+1)(3n)^{(n+1)}} \le \frac{1}{10^4}. \qquad (3)$$

D'abord, on peut essayer pour $n = 1$ et $n = 2$, mais on voit que l'inégalité (3) n'est pas vérifiée. Finalement, pour $n = 3$, on trouve

$$\frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 9^4} \sim 9.526 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}.$$