Série 4

Mardi prochain : Test en groupe

Partiellement en classe vendredi

Exercice 1

1. On considère la fonction $f(x) = \sin(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_2 f(x)$ de degré 2 interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = 3/2\pi$.
2. Calculer le polynôme de Lagrange $\Pi_3 f(x)$ de degré 3 interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$ et $x_3 = 3$. Quelle est sa valeur en $x = 1.5$?
3. Répéter les points a) et b) en utilisant la fonction $g(x) = 2x^2 + 3x + 9$. Que remarquez-vous ?
4. On connaît les valeurs d'une fonction $g(x)$ aux noeuds $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 3$:
$$g(0) = 3, \quad g(0.5) = 1, \quad g(1.5) = 0, \quad g(3) = 6 .$$
Estimer sa valeur en $x = 2$ en interpolant g par un polynôme de degré 3 aux points $x = 0,\ 0.5,\ 1.5,\ 3$.

Exercice 2

On considère la fonction
$$f(x) = e^{2x}, \qquad x \in [0, 1].$$
Soit N un nombre entier, $H = 1/N$, et $\Pi_1^H f$ le polynôme composite linéaire par morceaux qui interpole la fonction f aux nœuds $x_i = iH$, $i = 0, 1, \dots N$.

a) Calculer le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation $E_1^H(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$ soit inférieure à 10^{-4}.

b) Soit $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole f aux nœuds $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots n$. Est-ce que l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$? Est-ce que le nombre de nœuds nécessaires pour que l'erreur soit plus petite que 10^{-4} est du même ordre de grandeur que celui du point a) ? Justifier vos réponses.

Exercice 3

On considère la fonction
$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in I = [0, 1]$$
Déterminer le nombre minimal d'intervalles uniformes pour que le polynôme linéaire par morceaux qui interpole la fonction par intervalles donne une erreur $\leq 10^{-5}$.

Exercice 4

On se donne la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), \qquad x \in I = [0,1].$$

1. Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction aux nœuds équidistribués $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f)$ sur l'intervalle I en fonction du degré n du polynôme et étudier son comportement quand $n \to \infty$.
2. Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$. *(Suggestion : essayer pour $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$.)*