Série 3 (Corrigé)

Mardi prochain : Parcourez les chapitres 2.1-2.4 des notebooks Jupyter et resolvez les exercices qui y sont proposés.

Partiellement en classe

Exercice 1

On se donne la fonction continue $f(x) = \ln(x+1) - 2$ sur l'intervalle $[4, 12]$.

1. Montrer qu'il existe un zéro x^* pour la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[4, 12]$ et qu'il est unique.
2. En utilisant la méthode de bissection sur l'intervalle $[4, 12]$, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le zéro x^* avec une tolérance $tol = 10^{-10}$.
3. On considère la méthode du point fixe $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$, avec

$$g(x^{(n)}) = x^{(n)} - (x^{(n)} + 1)\left[\ln(x^{(n)} + 1) - 2\right] .$$

   Montrer que cette méthode est convergente au point fixe x^* et déterminer son ordre de convergence.
4. Trouver une constante C telle que

$$|x^{(n+1)} - x^*| \le C|x^{(n)} - x^*|^2$$

5. En supposant partir d'une valeur initiale $x^{(0)}$ telle que $|x^* - x^{(0)}| \le 10^{-1}$, trouver le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}.
6. On applique maintenant la méthode de bissection pour trouver une approximation $\tilde{x}$ telle que $|x^* - \tilde{x}| \le 10^{-1}$ et ensuite la méthode de point fixe à partir de la valeur $\tilde{x}$. Estimer dans ce cas, le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}.

Sol. :

1. *On voit d'abord que* $f(4) = -0.391 < 0$ *et* $f(12) = 0.565 > 0$ *et, puisque* $f(x)$ *est continue dans* $[4, 12]$*, on peut dire qu'il existe au moins un zéro* $x^* \in [4, 12]$*. On calcule ensuite la dérivée première :*

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

   et on voit que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [4, 12]$*. La fonction* $f(x)$ *est alors strictement croissante dans l'intervalle considéré et donc on peut conclure que la valeur* x^* *telle que* $f(x^*) = 0$ *est unique.*

2. *Pour la méthode de la bissection on a*

$$|x^{(m)} - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{m+1}} = \frac{8}{2^{m+1}} = 2^{-m+2}.$$

Pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-10} *on doit imposer* $2^{-m+2} \leq 10^{-10}$*, ce qui donne* $m = 36$*.*

3. g *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[4, 12]$ *et*

$$g'(x) = -\ln(x+1) + 2 \ .$$

Puisque $f(x^*) = \ln(x^*+1) - 2 = 0$*, il est clair que* $g'(x^*) = 0$*. Grâce à la Proposition 2 des notes du cours (Proposition 2.1 du livre), il existe un* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $x^{(0)}$*,* $|x^{(0)} - x^*| \leq \delta$*, la méthode est convergente. En outre, elle est d'ordre 2, grâce à la Proposition 3 des notes du cours (Proposition 2.2 du livre).*

4. *La fonction* g *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[4, 12]$ *et* $g'(x^*) = 0$*. Un développement de Taylor en* $x = x^*$ *nous donne :*

$$\exists \eta \in [x^{(n)}, x^*] \quad \textit{tel que} \quad x^{(n+1)} - x^* = g(x^{(n)}) - g(x^*) = g'(x^*)(x^{(n)} - x^*) + \frac{g''(\eta)}{2}(x^{(n)} - x^*)^2$$

Comme $g'(x^*) = 0$*, la relation suivante est obtenue :*

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x^{(n)}, x^*]} |g''(x)| \quad |x^{(n)} - x^*|^2 \ .$$

La constante C *cherchée est donc :*

$$C = \frac{1}{2} \max_{x \in [4,12]} |g''(x)| \ .$$

On a

$$g''(x) = -\frac{1}{x+1} \ .$$

La fonction $|g''(x)|$ *est une fonction décroissante pour* $x \geq 0$ *et donc*

$$C = \frac{1}{2}|g''(4)| = \frac{1}{10}.$$

5. *On a par hypothèse* $|x^* - x^{(0)}| \leq 10^{-1}$*. Donc*

$$|x^* - x^{(1)}| \leq \frac{1}{10}|x^* - x^{(0)}|^2 \leq 0.1\,10^{-2}$$
$$|x^* - x^{(2)}| \leq \frac{1}{10}|x^* - x^{(1)}|^2 \leq 10^{-7}$$
$$|x^* - x^{(3)}| \leq \frac{1}{10}|x^* - x^{(2)}|^2 \leq 10^{-15}$$

Il suffit de faire $n = 3$ *itérations pour avoir une erreur plus petite que* 10^{-10}*.*

6. *Si on combine la méthode de la bissection avec celle de point fixe, on peut faire* 6 *itérations avec la première méthode pour avoir une erreur* $|x^* - \tilde{x}| \leq 10^{-1}$ *et ensuite* 3 *itérations avec la méthode de point fixe pour calculer le zéro avec une tolérance de* 10^{-10}*.*

Exercice 2

On veut calculer les solutions de l'équation $f(x) = x/2 - \sin(x) + \pi/6 - \sqrt{3}/2 = 0$ dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$. D'après le graphe de la Figure 1, on a deux zéros $\alpha_1 \in I_1 = [-\pi/2, 0]$ et $\alpha_2 \in I_2 = [\pi/2, \pi]$.

1. Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où cela est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance *tol* $= 10^{-10}$, sur les intervalles I_1, I_2.
2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction f. A l'aide du graphe de la fonction f, trouver pour quel zéro l'ordre de convergence de la méthode est égal à 2.
3. On considère maintenant la méthode de point fixe $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ avec

$$\varphi(x^{(k)}) = \sin(x^{(k)}) + \frac{x^{(k)}}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

pour calculer le zéro $\alpha_2 \in I_2$. Établir si cette méthode de point fixe est
— *localement convergente*, c.-à-d. que la méthode converge vers α_2 pourvu que $x^{(0)}$ soit assez proche de α_2 ;
— *globalement convergente sur* I_2, c.-à-d. que la méthode converge pour tout $x^{(0)} \in I_2$.
Pour ce faire, considérer le graphe de la fonction $\varphi(x)$ sur l'intervalle I_2, Figure 1.

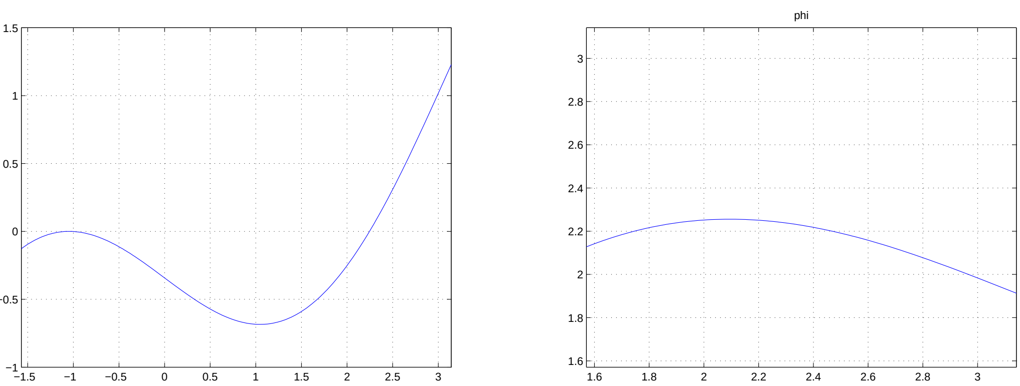

FIGURE 1 – Graphes des fonctions $f(x)$ (à gauche) et $\varphi(x)$ (à droite).

4. On considère le zéro α_2 et la méthode de point fixe précédente. Montrer qu'il existe une constante positive $0 < C < 1$ telle que

$$|x^{(k+1)} - \alpha_2| = |\varphi(x^{(k)}) - \varphi(\alpha_2)| \leq C|x^{(k)} - \alpha_2| \ ,$$

et calculer cette constante.
5. On considère les itérations $x^{(k)}$ de la méthode de point fixe du point c) initialisée avec $x^{(0)} = \pi/2$. Montrer à partir de l'inégalité du point précédent qu'on a

$$|x^{(k)} - \alpha_2| \leq C^k |x^{(0)} - \alpha_2|,$$

puis, utiliser ce résultat pour trouver le nombre d'itérations nécessaires pour que l'erreur $|x^{(k)} - \alpha_2|$ soit plus petite que 2^{-20}.

Sol. :

1. *On peut appliquer la méthode de la bissection pour calculer le zéro $\alpha_2 \in I_2$, mais on ne peut pas utiliser cette méthode pour calculer α_1, car la condition $f(a) \cdot f(b) < 0$ n'est pas satisfaite pour tout $a, b \in [-\pi/2, \alpha_2)$, $a < b$.*

   On considère donc le deuxième zéro $\alpha_2 \in I_2 = (\pi/2, \pi)$ et on applique la méthode de la bissection pour trouver une valeur approchée, avec une tolérance $tol = 10^{-10}$. Pour estimer le nombre d'itérations nécessaire, on peut écrire (voir aussi section 2.1 du livre) :
$$|e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha_2| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \ ,$$
   avec $a = \pi/2$, $b = \pi$ et imposer la condition $(b-a)/2^{k+1} \leq 10^{-10}$. On a :
$$(k+1)\log(2) \geq \log\left(\frac{b-a}{tol}\right)$$
   et dans notre cas :
$$k \geq \log\left(\frac{\pi/2}{10^{-10}}\right) / \log(2) - 1 \approx 32.87$$
   Donc on trouve que $k \geq 33$ itérations sont nécessaires.

2. *Dans ce cas, la méthode de Newton s'écrit :*
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\dfrac{x^{(k)}}{2} - \sin x^{(k)} + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2} - \cos x^{(k)}} \ .$$
   Pour ce qui concerne l'ordre de convergence, on rappelle que la convergence des itérations $x^{(k)}$ vers le zéro α est dite d'ordre p, $p > 0$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour k suffisamment grand, on a
$$|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C|x^{(k)} - \alpha|^p.$$
   Pour une méthode convergente et pour k suffisamment grand l'erreur $|x^{(k)} - \alpha|$ à l'itération k sera $\ll 1$. Donc, plus l'ordre p est grand, plus l'erreur $|x^{(k+1)} - \alpha|$ à l'itération suivante est petite (car $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C|x^{(k)} - \alpha|^p \ll C|x^{(k)} - \alpha|$), et plus la convergence de la méthode sera rapide.

   On a vu au cours (section 2.3 du livre) que l'ordre de convergence de la méthode de Newton est 2, pourvu que f' ne s'annule pas au zéro de f. En particulier, dans notre cas :
   — *zéro $\alpha = \alpha_1$: f est deux fois différentiable, $f(\alpha_1) = 0$ et $f'(\alpha_1) = 0$ donc la convergence sera seulement linéaire et $p = 1$ (on voit sur le graphe que α_1 est un maximum local pour la fonction f).*
   — *zéro $\alpha = \alpha_2$: f est deux fois différentiable, $f(\alpha_2) = 0$ et $f'(\alpha_2) \neq 0$ donc la convergence sera quadratique ($p = 2$) ;*

3. — *Pour qu'on ait une convergence* locale *de la méthode de point fixe vers α_2, il faut que α_2 soit effectivement un point fixe de φ et que $|\varphi'(\alpha_2)| < 1$ (voir les notes du cours ou la section 2.4 du livre, Théorème 2.1).*

D'abord, on vérifie que α_2 est un point fixe de $\varphi(x)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_2) &= \sin\alpha_2 + \frac{\alpha_2}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \sin\alpha_2 + \frac{\alpha_2}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2}{2} \\
&= -\frac{\alpha_2}{2} + \sin\alpha_2 - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \alpha_2 \\
&= -f(\alpha_2) + \alpha_2 = \alpha_2\ ,
\end{aligned}$$

où à la dernière ligne, on a utilisé le fait que $f(\alpha_2) = 0$.
Puis, on considère la dérivée $\varphi'(x) = \cos x + 1/2$; comme $-1 \le \cos x \le 0\ \forall x \in [\pi/2, \pi]$, on a que

$$-\frac{1}{2} \le \varphi'(x) \le \frac{1}{2} \qquad \forall x \in [\pi/2, \pi] = I_2. \tag{1}$$

En particulier, comme $\alpha_2 \in I_2$, on a $|\varphi'(\alpha_2)| < 1/2$: la méthode est donc localement convergente.

— *Pour que la méthode soit* globalement *convergente sur I_2, il faut que (voir les notes du cours ou la Proposition 2.1 du livre) :*
1) φ soit une fonction de I_2 dans lui-même *($\varphi : I_2 \to I_2$) ;*
2) on ait

$$\max_{x\in I_2} |\varphi'(x)| < 1.$$

D'après le graphe de $\varphi(x)$, on voit tout de suite que la condition a) est vérifiée ; la b) est satisfaite aussi, grâce à (1) ; en particulier, on a

$$\max_{x\in I_2} |\varphi'(x)| = \frac{1}{2}.$$

4. *Grâce au Théorème de Lagrange $\exists \eta \in I_2$ t.q.*

$$x^{(k+1)} - \alpha_2 = \varphi'(\eta)(x^{(k)} - \alpha_2)\ ,$$

et on peut deduire :

$$|x^{(k+1)} - \alpha_2| \le \max_{x\in I_2} |\varphi'(x)||x^{(k)} - \alpha_2|\ ,$$

et enfin la formule suivante pour la constante C :

$$C = \max_{x\in I_2} |\varphi'(x)| = \frac{1}{2}\ .$$

5. *Si on applique l'inégalité du point d), par récurrence, on trouve :*

$$|x^{(k)} - \alpha_2| \le C|x^{(k-1)} - \alpha_2| \le C^2|x^{(k-2)} - \alpha_2| \le \ldots \le C^k|x^{(0)} - \alpha_2|.$$

Dans notre cas, $C = 1/2$; l'inégalité que l'on vient de vérifier nous dit que, pour que l'erreur soit plus petite que 2^{-20}, il suffit de trouver k tel que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k |x^{(0)} - \alpha_2| < 2^{-20}.$$

Comme $x_0 \in [\pi/2, \pi]$ et $\pi/2 < \alpha_2 < \pi$, on a $|x^{(0)} - \alpha_2| \leq |\pi - \pi/2| = \pi/2 < 2$; donc il suffit que k soit assez grand pour que

$$2^{-k} \cdot 2 \leq 2^{-20}$$

c'est-à-dire $k \geq 21$ itérations sont nécessaires.