Série 3

Mardi prochain : Parcourez les chapitres 2.1-2.4 des notebooks Jupyter et resolvez les exercices qui y sont proposés.

Partiellement en classe

Exercice 1

On se donne la fonction continue $f(x) = \ln(x+1) - 2$ sur l'intervalle $[4, 12]$.

1. Montrer qu'il existe un zéro x^* pour la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[4, 12]$ et qu'il est unique.
2. En utilisant la méthode de bissection sur l'intervalle $[4, 12]$, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le zéro x^* avec une tolérance $tol = 10^{-10}$.
3. On considère la méthode du point fixe $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$, avec
$$g(x^{(n)}) = x^{(n)} - (x^{(n)} + 1)\left[\ln(x^{(n)} + 1) - 2\right] .$$
Montrer que cette méthode est convergente au point fixe x^* et déterminer son ordre de convergence.
4. Trouver une constante C telle que
$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq C|x^{(n)} - x^*|^2$$
5. En supposant partir d'une valeur initiale $x^{(0)}$ telle que $|x^* - x^{(0)}| \leq 10^{-1}$, trouver le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}.
6. On applique maintenant la méthode de bissection pour trouver une approximation $\tilde{x}$ telle que $|x^* - \tilde{x}| \leq 10^{-1}$ et ensuite la méthode de point fixe à partir de la valeur $\tilde{x}$. Estimer dans ce cas, le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}.

Exercice 2

On veut calculer les solutions de l'équation $f(x) = x/2 - \sin(x) + \pi/6 - \sqrt{3}/2 = 0$ dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$. D'après le graphe de la Figure 1, on a deux zéros $\alpha_1 \in I_1 = [-\pi/2, 0]$ et $\alpha_2 \in I_2 = [\pi/2, \pi]$.

1. Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où cela est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance $tol = 10^{-10}$, sur les intervalles I_1, I_2.

2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction f. A l'aide du graphe de la fonction f, trouver pour quel zéro l'ordre de convergence de la méthode est égal à 2.
3. On considère maintenant la méthode de point fixe $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ avec

$$\varphi(x^{(k)}) = \sin(x^{(k)}) + \frac{x^{(k)}}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

pour calculer le zéro $\alpha_2 \in I_2$. Établir si cette méthode de point fixe est
— *localement convergente*, c.-à-d. que la méthode converge vers α_2 pourvu que $x^{(0)}$ soit assez proche de α_2 ;
— *globalement convergente sur* I_2, c.-à-d. que la méthode converge pour tout $x^{(0)} \in I_2$. Pour ce faire, considérer le graphe de la fonction $\varphi(x)$ sur l'intervalle I_2, Figure 1.

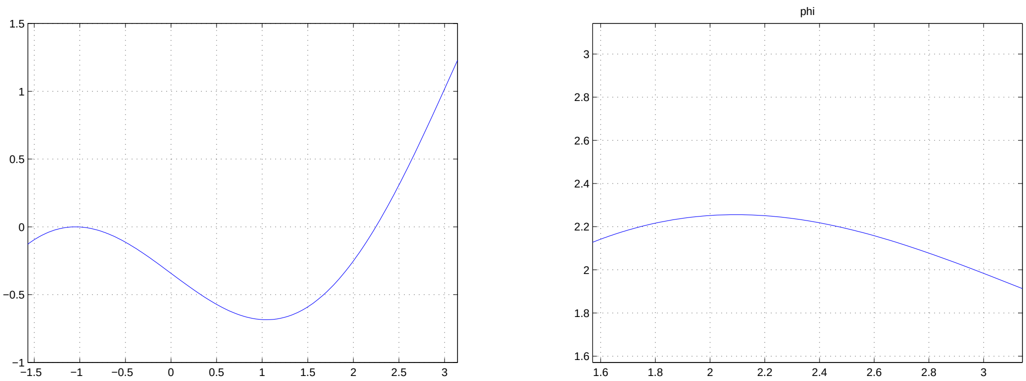

FIGURE 1 – Graphes des fonctions $f(x)$ (à gauche) et $\varphi(x)$ (à droite).

4. On considère le zéro α_2 et la méthode de point fixe précédente. Montrer qu'il existe une constante positive $0 < C < 1$ telle que

$$|x^{(k+1)} - \alpha_2| = |\varphi(x^{(k)}) - \varphi(\alpha_2)| \leq C|x^{(k)} - \alpha_2| \; ,$$

et calculer cette constante.
5. On considère les itérations $x^{(k)}$ de la méthode de point fixe du point c) initialisée avec $x^{(0)} = \pi/2$. Montrer à partir de l'inégalité du point précédent qu'on a

$$|x^{(k)} - \alpha_2| \leq C^k |x^{(0)} - \alpha_2|,$$

puis, utiliser ce résultat pour trouver le nombre d'itérations nécessaires pour que l'erreur $|x^{(k)} - \alpha_2|$ soit plus petite que 2^{-20}.