Série 2 (Corrigé)

Semaine prochaine, mardi : Test en groupe
Vendredi on va travailler sur des exercices du chapitre.

Partiellement en classe

Exercice 1

On considère le problème de calculer $\sqrt{2}$.
Vérifier que $\alpha = \sqrt{2}$ est un point fixe de la fonction

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

Ensuite, prouver que pour $x^{(0)} \in [1,2]$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq K^k |x^{(0)} - \alpha|, \quad \forall k \geq 0.$$

Quel est le comportement de la suite $\{x^{(k)}\}$ lorsque $k \to \infty$? Combien d'itérations de la méthode de point fixe sont nécessaires pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ qui soit exacte jusqu'au dixième chiffre après la virgule ? (Suggestion : il faut avoir une estimation de la constante K). ***Sol. :***

Il faut utiliser la proprieté suivante, qui a été prouvée au cours :

Proposition 1 *On suppose que les hypothèses suivantes (**H1** et **H2**) soient satisfaites :*

H1. *Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(a,b)$ telle que l'image de $[a,b]$ selon φ est un sous-ensemble de $[a,b]$ (c.-à-d. $\varphi : [a,b] \to [a,b]$) ;*

Alors il existe au moins un point fixe $\alpha \in [a,b]$ de φ (c.-à-d. $\varphi(\alpha) = \alpha$).

H2. *$\exists K < 1$ tel que $|\varphi'(x)| \leq K$ $\forall x \in [a,b]$*

Alors

a) il existe un unique point fixe α de φ dans $[a,b]$;

b) $\forall x^{(0)} \in [a,b]$ ($x^{(0)}$ assigné), la suite $\{x^{(k)}\}$ définie par

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 0.$$

converge vers α lorsque $k \to \infty$;

c) on a le résultat de convergence suivant :

$$| x^{(k+1)} - \alpha | \leq K | x^{(k)} - \alpha |, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

On va voir que K dans H2 est la constante demandée. Dans la suite on rappelle la preuve de la proposition 1.

Comme $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ (hypothèse H1), la suite $\{x^{(k)}\}$, qui est définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} \in [a,b]; \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

reste dans l'intervalle $[a,b]$.

A partir de

$$x^{(k+1)} - \alpha = \varphi(x^{(k)}) - \varphi(\alpha)$$

on tire, grâce au théorème de Lagrange appliqué à la fonction φ, qu'il existe η compris entre $x^{(k)}$ et α tel que

$$x^{(k+1)} - \alpha = \varphi'(\eta)(x^{(k)} - \alpha).$$

Or, $x^{(k)}$ et α appartiennent à $[a,b]$, donc on a $\eta \in [a,b]$ aussi ; ceci entraîne le résultat voulu, grâce à l'hypothèse H2 :

$$|x^{(k+1)} - \alpha| = |\varphi'(\eta)(x^{(k)} - \alpha)| = |\varphi'(\eta)||x^{(k)} - \alpha| \leq K|x^{(k)} - \alpha|.$$

□

Les points fixes de $\varphi(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ sont les racines de

$$x = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,$$

donc $\alpha = \sqrt{2}$ est bien un point fixe de φ.

Or, le graphe de la fonction $-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{2}$ c'est une parabole, qui atteint son maximum en $x = 2$ (voir fig. 1). Cette parabole est donc croissante sur $[1,2]$,

FIGURE 1 – Fonction de point fixe $\varphi(x)$

ce qui peut être vérifié aussi en calculant la dérivée $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{2-x}{2} \geq 0 \quad si \quad x \in [1,2].$$

Donc on aura

$$\varphi(1) = \frac{5}{4} \leq \varphi(x) \leq \varphi(2) = \frac{3}{2} \quad \forall x \in [1,2],$$

ce qui montre que l'hypothèse H1 est satisfaite (l'image de $[1,2]$ selon φ est $[5/4, 3/2]$ qui est un sous-ensemble de $[1,2]$, voir fig. 1).

De plus, on a que :

$$x \in [1,2] \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2},$$

donc H2 est satisfaite avec $K = 1/2$.

Il est clair que l'on peut appliquer l'inégalité $|x^{(k)} - \alpha| \leq K|x^{(k-1)} - \alpha|$ en récurrence. On obtient

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq K|x^{(k-1)} - \alpha| \leq K^2|x^{(k-2)} - \alpha| \leq \ldots \leq K^k|x^{(0)} - \alpha|.$$

Comme $0 < K < 1$*, on a* $K^k \to 0$ *lorsque* $k \to \infty$*, donc*

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - \alpha| = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha.$$

En d'autres mots, la suite $\{x^{(k)}\}$ *converge vers le point fixe* $\alpha = \sqrt{2}$*. On remarque que l'opération d'extraction de racine carré n'est pas nécessaire pour calculer les valeurs approchées* $x^{(k)}$ *; on a donc trouvé une méthode pour implementer l'opération* $\sqrt{\cdot}$ *à partir des opérations fondamentales (l'ordinateur aussi fait la même chose, mais en utilisant un algorithme optimisé beaucoup plus performant).*

Comme $|x^{(0)} - \alpha| < 1$*, on a*

$$|x^{(k)} - \alpha| \le K^k = 2^{-k}.$$

Alors on aura que $|x^{(k)} - \alpha| <$ *tolérance pourvu que* $2^{-k} <$ *tolérance, voir* $k > -\log_2($*tolérance*$)$*. La tolérance a demander si l'on veut que l'approximation soit exacte jusq'au 10ème chiffre après la virgule est clairement* 10^{-10}*. Ceci nous permet de trouver le nombre d'itérations nécessaires : c'est le plus petit naturel* k *tel que* $k > -log_2(10^{-10}) = 10\log_2(10)$*, donc* $k = 34$*.*

Exercice 2

On considère la fonction $\varphi(x) = ax(1 - x^2)$, a étant un paramètre réel.

1. Montrer que $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ si $0 \le a \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. Trouver les valeurs positives de a telles que l'itération de point fixe

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \qquad k \ge 0 \tag{1}$$

   puisse approcher le point fixe $\alpha_1 = 0$.
3. Trouver la condition sous laquelle un deuxième point fixe $\alpha_2 > 0$ existe (dans l'intervalle $[0,1]$) et déterminer les valeurs de a telles que l'itération (1) puisse approcher α_2.
4. Pour quelle valeur de a l'itération (1) peut-on approcher α_2 avec un ordre de convergence quadratique ?

Sol. :

1. *Pour* $a = 0$*,* $\varphi \equiv 0 \in [0,1]$*. Si* $a > 0$*,* φ *est une fonction strictement positive sur l'intervalle* $(0,1)$ *et qui vaut zéro en* $x = 0$ *et* $x = 1$*. Pour trouver le point de maximum de* φ *en* $(0,1)$*, on calcule*

$$\varphi'(x) = a(1 - 3x^2) = 0 \quad \to \quad x = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

   Si on impose $\varphi\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) \le 1$*, on trouve* $a \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2. *D'abord il faut contrôler que $\alpha = 0$ est un point fixe pour φ. En effet*

$$\varphi(0) = 0 \qquad \forall a.$$

Puis, on calcule la dérivée première de φ

$$|\varphi'(x)| = a(1 - 3x^2)$$

On peut approcher le point fixe $\alpha_1 = 0$ si

$$|\varphi'(0)| < 1 \quad \rightarrow \quad a < 1.$$

3. *On cherche maintenant si il existe un point $0 < \alpha_2 \leq 1$ tel que*

$$\alpha_2 = \varphi(\alpha_2).$$

On trouve

$$\alpha_2 = a\alpha_2(1 - \alpha_2^2) \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{a}} > 0.$$

Si on impose la condition $\alpha_2 \leq 1$, on a

$$\sqrt{1 - \frac{1}{a}} < 1 \quad \rightarrow \quad a > 1 \quad \left(\text{avec toujours } a \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Il faut aussi montrer que la dérivée de φ_2 en α_2 est inférieure à 1 en valeur absolue ([A écrire !])

4. *On a que l'iteration*

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$$

peut approcher α_2 avec ordre 2 si $|\varphi'(\alpha_2)| = 0$. On a donc que

$$0 = |\varphi'(\alpha_2)| = a|(1 - 3\alpha_2^2)|, \qquad a > 0$$

si $\alpha_2^* = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

5. *Ce point fixe est atteint en correspondance de*

$$1 = a(1 - (\alpha_2^*)^2) \quad \rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Exercice 3

Soit α une racine double de la fonction f, c'est-à-dire $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

1. En tenant compte du fait qu'on peut écrire la fonction f comme

$$f(x) = (x - \alpha)^2 h(x) \qquad \text{où} \quad h(\alpha) \neq 0\ ,$$

vérifier que la méthode de Newton pour l'approximation de la racine α est seulement d'ordre 1. [Conseil : écrire la méthode sous la forme de point fixe et calculer $\Phi'(\alpha)$]

2. On considère la méthode de Newton modifiée suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Vérifier que cette méthode est au moins d'ordre 2 si l'on veut approcher α.

Sol. :

1. *On regarde la méthode de Newton comme une méthode de point fixe :*

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Si $0 < |\varphi'(\alpha)| < 1$ la méthode est d'ordre 1, tandis que si $\varphi'(\alpha) = 0$ elle est au moins d'ordre 2. On a

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

où

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^2 h(x) \\ f'(x) &= (x-\alpha)\left[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)\right] \\ f''(x) &= 2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h''(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} &= \frac{(x-\alpha)^2 h(x)\left[2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h''(x)\right]}{(x-\alpha)^2\left[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)\right]^2}, \\ &= \frac{h(x)\left[2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h''(x)\right]}{\left[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)\right]^2}, \\ \varphi'(\alpha) &= \frac{h(\alpha)\left[2h(\alpha)\right]}{\left[2h(\alpha)\right]^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et la méthode est d'ordre 1.

2. *Pour la méthode de Newton modifiée, on a*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - 2\frac{f(x)}{f'(x)} \\ \varphi'(x) &= 1 - 2\frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -1 + 2\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \end{aligned}$$

On vient de calculer le terme $f(x)f''(x)/f'(x)^2$ et on a vu qu'il converge vers $1/2$ si $x \to \alpha$; on a finalement

$$\varphi'(\alpha) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

La méthode est donc au moins d'ordre 2.

Exercice 4

On considère l'équation non-linéaire $f(x) = 0$, où $f(x) = e^{-x} - x^2$.

a) Montrer que la méthode de bissection peut être utilisée afin de calculer le seul zéro α de f dans $[0, 1]$.

b) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de bissection nécessaire pour approximer α avec une tolérance de 10^{-10}.

c) Ecrire la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et montrer sa convergence vers la solution α.

d) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de point fixe nécessaire pour calculer une solution approchée avec une tolérance de 10^{-10}.

Sol. :

a) Comme $f'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ *pour* $x \in [0, 1]$, *la fonction* f *est monotone décroissante sur* $[0, 1]$ *; puis, vu que* $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 + 1/e < 0$, *on a que* f *admet un seul zéro* α *dans* $[0, 1]$.

b) Soit $x^{(n)}$ *la n-ième itération de la méthode de bissection sur l'intervalle* $[0, 1]$ *: on a alors*

$$|x^{(n)} - \alpha| \leq 2^{-n},$$

d'où le nombre des itérations nécessaires :

$$n \geq \frac{-\log(10^{-10})}{\log 2} = \frac{10}{\log 2}.$$

c) Soit $x^{(n)}$ *la n-ième itération de la méthode de point fixe, définie par*

$$x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)}), \quad x^{(0)} \in [0, 1].$$

On remarque que, $\forall x \in [0, 1]$ *:*

$$0 < 1 - \frac{3}{4} < \varphi'(x) = 1 - \frac{e^{-x} + 2x}{4} < 1 - \frac{e^{-1}}{4}. \qquad (\star)$$

Pour monter que la méthode converge sur $[0, 1]$ *il faut prouver le deux points suivants.*

— *Si* $x \in [0, 1]$, *alors* $\varphi(x) \in [0, 1]$. *En fait, de* $(\star)$ *on a que* $\varphi'(x) > 0$, *sur* $[0, 1]$, *donc*

$$\forall x \in [0, 1] : \quad 0 < \frac{1}{4} = \varphi(0) < \varphi(x) < \varphi(1) = \frac{e^{-1} + 3}{4} < 1.$$

— *On a* $|\varphi'(x)| < 1$ *: cela est une conséquence de* $(\star)$. *De plus, pour* $x \in [0, 1]$ *on a* $\varphi''(x) = (e^{-x} - 2)/4 < 0$, *et donc* $\max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \varphi'(0) = 3/4$.

d) Grâce à l'estimation suivante :

$$|x^{(n+1)} - \alpha| \leq \max_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)||x^{(n)} - \alpha| = \frac{3}{4}|x^{(n)} - \alpha|,$$

on a

$$|x^{(n)} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |x^{(0)} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Donc, pour approcher la solution α avec une tolérance de 10^{-10}, il faut que

$$n \log(3/4) \leq \log(10^{-10}) = -10,$$

c'est-à-dire

$$n \leq \frac{10}{\log(4/3)}.$$

Comme $\log(4/3) < \log(2)$, la méthode de bissection dans ce cas est plus performante que celle de point fixe.

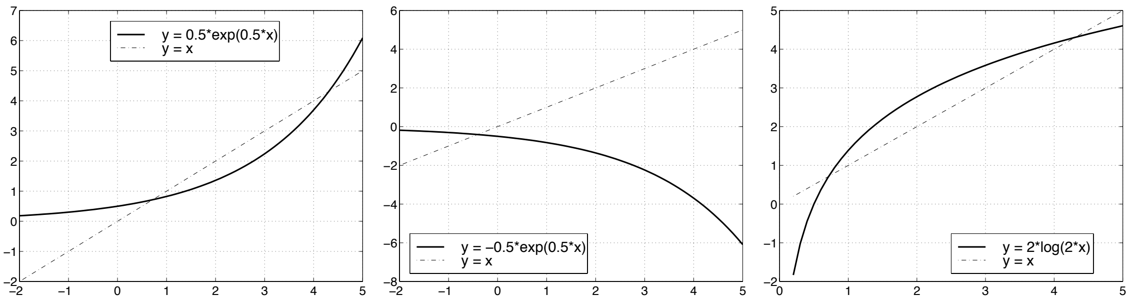
Python, Exercise similaire au test 1

Exercice 5

On considère les méthodes de point fixe $x^{(n+1)} = g_i(x^{(n)}) \quad (i = 1, 2, 3)$ avec :

$$g_1(x^{(n)}) = \frac{1}{2}e^{x^{(n)}/2}, \qquad g_2(x^{(n)}) = -\frac{1}{2}e^{x^{(n)}/2}, \qquad g_3(x^{(n)}) = 2\ln(2x^{(n)}),$$

dont les fonctions d'itération $g_i(x)$ sont visualisées sur la Figure 2.



(a) (b) (c)

FIGURE 2 – (a) Graph de la fonction g_1. (b) Graph de la fonction g_2. (c) Graph de la fonction g_3.

1. Pour chaque point fixe $\bar{x}$ de la fonction d'itération g_i $(i = 1, 2, 3)$, on suppose choisir une valeur initiale $x^{(0)}$ proche de $\bar{x}$. Etudier si la méthode converge vers $\bar{x}$.
2. Pour chaque fonction d'itération g_i, déterminer graphiquement pour quelles valeurs initiales $x^{(0)}$ la méthode de point fixe correspondante converge et vers quel point fixe.
3. Montrer que si $\bar{x}$ est un point fixe de la fonction g_i $(i = 1, 2, 3)$, alors il est aussi un zéro de la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$ (dont le comportement est tracé sur la Figure 3).
4. Comment peut-on calculer les zéros de f ?

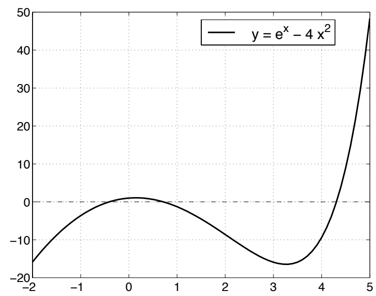


FIGURE 3 – Graph de la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$.

Sol. :

1. *Solution pour la méthode g_1*

   Cette fonction a deux points fixes $\bar{x}_1 \in [0,1]$ et $\bar{x}_2 \in [4,5]$. On doit donc estimer la dérivée de g_1 aux deux points fixes. Puisque $g_1'(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$ est une fonction croissante, pour $\bar{x}_1$ on a

$$\frac{1}{4} \leq g_1'(0) \leq g_1'(\bar{x}_1) \leq g_1'(1) = \frac{1}{4}e^{1/2} \approx 0.4122, \tag{2}$$

   et donc $|g_1'(\bar{x}_1)| < 1$. En utilisant le théorème de convergence locale d'une méthode de point fixe, on peut dire que $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall x_0 : |\bar{x}_1 - x_0| \leq \varepsilon$ la méthode converge au point $\bar{x}_1$. Pour $\bar{x}_2$ on a

$$g_1'(\bar{x}_2) \geq g_1'(4) = \frac{1}{4}e^2 \approx 1.8473 \tag{3}$$

   et donc on ne peut pas utiliser le théorème de convergence locale parce que $|g_1'(\bar{x}_2)| > 1$.

   Solution pour la méthode g_2

   Cette fonction a un seul point fixe $\bar{x}_1 \in [-1,0]$. La dérivée $g_2'(x) = -\frac{1}{4}e^{x/2}$ est decroissante et donc

$$-0.1516 \approx -\frac{1}{4}e^{-1/2} = g_2'(-1) \geq g_2'(\bar{x}_1) \geq g_2'(0) = -\frac{1}{4}$$

   et donc $|g_2'(\bar{x}_1)| < 1$. En utilisant le théorème de convergence locale d'une méthode de point fixe, on peut dire que $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall x_0 : |\bar{x}_1 - x_0| \leq \varepsilon$ la méthode converge au point $\bar{x}_1$.

   Solution pour la méthode g_3

   Cette fonction a deux points fixes $\bar{x}_1 \in [1/2,1]$ et $\bar{x}_2 \in [4,5]$. On doit donc estimer la dérivée de g_1 aux deux points fixes. Puisque $g_3'(x) = \frac{2}{x}$ est une fonction décroissante, pour $\bar{x}_1$ on a

$$g_3'(\bar{x}_1) \geq g_3'(1) = 2, \tag{4}$$

   et donc on ne peut pas utiliser le théorème de convergence locale parce que $|g_3'(\bar{x}_1)| > 1$. Pour $\bar{x}_2$ on a

$$\frac{2}{5} = g_3'(5) \leq g_3'(\bar{x}_2) \leq g_3'(4) = \frac{1}{2} \tag{5}$$

   et donc $|g_3'(\bar{x}_2)| < 1$. En utilisant le théorème de convergence locale d'une méthode de point fixe, on peut dire que $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall x_0 : |\bar{x}_2 - x_0| \leq \varepsilon$ la méthode converge au point $\bar{x}_2$.

2. *Solution pour la méthode g_1*

   En regardant la Figure 4, on voit que pour $x_0 < \bar{x}_2$ la méthode converge vers $\bar{x}_1$ tandis que pour $x_0 > \bar{x}_2$ la méthode diverge.

   Solution pour la méthode g_2

   En regardant la Figure 5, on voit que la méthode converge pour n'importe quelle valeur x_0.

FIGURE 4 – Itérations de point fixe pour les fonctions g_1.

FIGURE 5 – Itérations de point fixe pour les fonctions g_2.

Solution pour la méthode g_3

En regardant la Figure 6, on voit que pour $x_0 > \bar{x}_1$ la méthode converge vers $\bar{x}_2$ tandis que pour $x_0 < \bar{x}_1$ la méthode s'arrête car pour un k assez grand, $x^{(k)}$ est négatifs et φ_3 n'est pas définie.

FIGURE 6 – Itérations de point fixe pour les fonctions g_3.

3. *On dénote α, β et γ, avec $\alpha < \beta < \gamma$, les trois zéros de f.*
   Pour la méthode g_1 on a

$$\bar{x} = \frac{1}{2} e^{\bar{x}/2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\bar{x} = e^{\bar{x}/2}$$

   et, en élevant au carré, $4\bar{x}^2 = e^{\bar{x}}$.
   De même, pour la méthode g_2 on a

$$\bar{x} = -\frac{1}{2} e^{\bar{x}/2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\bar{x} = -e^{\bar{x}/2}$$

   et, en élevant au carré, on trouve de nouveau $4\bar{x}^2 = e^{\bar{x}}$.
   Enfin, pour la méthode g_3 :

$$\bar{x} = 2\ln(2\bar{x}) \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{x} = \ln(4\bar{x}^2)$$

   et donc $e^{\bar{x}} = e^{\ln(4\bar{x}^2)} = 4\bar{x}^2$.

4. *Solution pour la méthode g_1*

   Graphiquement, on peut voir que les deux points fixes $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ coïncident respectivement avec β et γ. Puisque cette méthode converge vers $\bar{x}_1$, elle peut donc être utilisée pour approcher β.

   Solution pour la méthode g_2

   Graphiquement, on peut voir que le point fixe $\bar{x}_1$ coïncide avec α et, puisque cette méthode est convergente, elle peut être utilisée pour approcher α.

   Solution pour la méthode g_3

   Graphiquement, on peut voir que les deux points fixes $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ coïncident respectivement avec β et γ. Cette méthode étant convergente vers $\bar{x}_2$, elle peut être utilisée pour approcher γ.
