Série 2

Semaine prochaine, mardi : Test en groupe
Vendredi on va travailler sur des exercices du chapitre.

Partiellement en classe

Exercice 1

On considère le problème de calculer $\sqrt{2}$.
Vérifier que $\alpha = \sqrt{2}$ est un point fixe de la fonction

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

Ensuite, prouver que pour $x^{(0)} \in [1, 2]$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq K^k |x^{(0)} - \alpha|, \quad \forall k \geq 0.$$

Quel est le comportement de la suite $\{x^{(k)}\}$ lorsque $k \to \infty$? Combien d'itérations de la méthode de point fixe sont nécessaires pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ qui soit exacte jusqu'au dixième chiffre après la virgule ? (Suggestion : il faut avoir une estimation de la constante K).

Exercice 2

On considère la fonction $\varphi(x) = ax(1 - x^2)$, a étant un paramètre réel.

1. Montrer que $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ si $0 \leq a \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. Trouver les valeurs positives de a telles que l'itération de point fixe

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \qquad k \geq 0 \tag{1}$$

   puisse approcher le point fixe $\alpha_1 = 0$.
3. Trouver la condition sous laquelle un deuxième point fixe $\alpha_2 > 0$ existe (dans l'intervalle $[0, 1]$) et déterminer les valeurs de a telles que l'itération (1) puisse approcher α_2.
4. Pour quelle valeur de a l'itération (1) peut-on approcher α_2 avec un ordre de convergence quadratique ?

Exercice 3

Soit α une racine double de la fonction f, c'est-à-dire $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

1. En tenant compte du fait qu'on peut écrire la fonction f comme

$$f(x) = (x - \alpha)^2 h(x) \qquad \text{où} \quad h(\alpha) \neq 0 \, ,$$

vérifier que la méthode de Newton pour l'approximation de la racine α est seulement d'ordre 1. [Conseil : écrire la méthode sous la forme de point fixe et calculer $\Phi'(\alpha)$]

2. On considère la méthode de Newton modifiée suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Vérifier que cette méthode est au moins d'ordre 2 si l'on veut approcher α.

Exercice 4

On considère l'équation non-linéaire $f(x) = 0$, où $f(x) = e^{-x} - x^2$.

a) Montrer que la méthode de bissection peut être utilisée afin de calculer le seul zéro α de f dans $[0, 1]$.

b) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de bissection nécessaire pour approximer α avec une tolérance de 10^{-10}.

c) Ecrire la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et montrer sa convergence vers la solution α.

d) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de point fixe nécessaire pour calculer une solution approchée avec une tolérance de 10^{-10}.

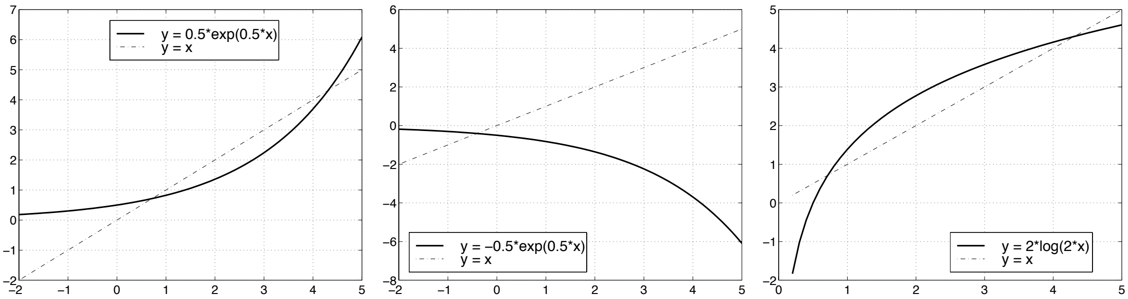
Python, Exercise similaire au test 1

Exercice 5

On considère les méthodes de point fixe $x^{(n+1)} = g_i(x^{(n)}) \quad (i = 1, 2, 3)$ avec :

$$g_1(x^{(n)}) = \frac{1}{2}e^{x^{(n)}/2}, \qquad g_2(x^{(n)}) = -\frac{1}{2}e^{x^{(n)}/2}, \qquad g_3(x^{(n)}) = 2\ln(2x^{(n)}),$$

dont les fonctions d'itération $g_i(x)$ sont visualisées sur la Figure 1.



(a) (b) (c)

FIGURE 1 – (a) Graph de la fonction g_1. (b) Graph de la fonction g_2. (c) Graph de la fonction g_3.

1. Pour chaque point fixe $\bar{x}$ de la fonction d'itération g_i $(i = 1, 2, 3)$, on suppose choisir une valeur initiale $x^{(0)}$ proche de $\bar{x}$. Etudier si la méthode converge vers $\bar{x}$.
2. Pour chaque fonction d'itération g_i, déterminer graphiquement pour quelles valeurs initiales $x^{(0)}$ la méthode de point fixe correspondante converge et vers quel point fixe.
3. Montrer que si $\bar{x}$ est un point fixe de la fonction g_i $(i = 1, 2, 3)$, alors il est aussi un zéro de la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$ (dont le comportement est tracé sur la Figure 2).
4. Comment peut-on calculer les zéros de f ?

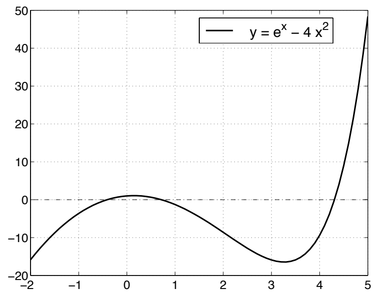


FIGURE 2 – Graph de la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$.