Série 1

Semaine prochaine, **Pour ce vendredi :** apprenez les vidéos des sections 1.2-1.3.
Mardi aux exercices : Parcourez les sections 1.2-1.3 des notebooks Jupyter et resolvez les exercices qui y sont proposés.

Partiellement en classe

Exercice 1

a) Trouver une fonction $f(x)$ correspondant à chacune des descriptions suivantes :
   1. $f(x)$ est discontinue en 0.
   2. $f(x)$ est discontinue en 0 mais contient un zero en x=2.
   3. $f(x)$ est strictement positive.
   4. $f(x)$ est positive ou nulle $\forall x \in \mathbb{R}$.
   5. $f(x)$ a au moins deux zéros.
   6. $f(x)$ change de signe mais ne passe pas par zero.

b) Pour quelle(s) fonction(s) du point a) peut-on espérer trouver un zéro avec la méthode de bissection.

c) Montrer que l'erreur commise avec la méthode de la bissection est bornée comme suit :
$$|e^{(k)}| := |x^{(k)} - \alpha| < \frac{b-a}{2^{k+1}}. \tag{1}$$

d) Considérons la fonction $sin(x)$ dans l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$. Combien d'iterations sont-elles nécessaires pour trouver un zero avec une tolérance de $\varepsilon = 10^{-7}$.

e) Si dans l'algorithme on divise l'intervalle en deux parties de tailles non égales, quel en sera l'effet ? Donner une borne théorique pour le pire cas en supposant que l'intervalle est divisé en utilisant 1/3 et 2/3 de l'intervalle original.

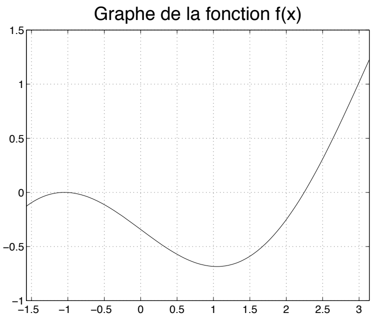
Exercice 2

Soit $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x - 5$. On observe que :
$$f(1) = -6 < 0 \quad \text{et} \quad f(3) = 16 > 0 \ .$$
On a sûrement au moins un zéro $x^* \in [1,3]$.

1. Montrer l'unicité du zéro $x^* \in [1,3]$.
2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction f.
3. En interprétant cette méthode comme une méthode de point fixe, montrer qu'elle est d'ordre 2. *(cette partie sera a faire après avoir vu la section 1.4 des vidéos)*

Exercice 3

On veut calculer les zéros de l'équation $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin(x) + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. Le graphe de la fonction $f(x)$ est montré dans la figure suivante :



1. Peut-on appliquer la méthode de bissection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance $tol = 10^{-10}$, après avoir choisi un intervalle convenable.
2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction $f(x)$.
3. A l'aide du graphe de la fonction $f(x)$, déduire l'ordre de convergence de la méthode pour les deux zéros. *(cette partie sera a faire après avoir vu la section 1.4 des vidéos)*

Python

L'exercice suivant se trouve dans le notebook *1.2 Newton-Raphson*.

Exercice 4

On cherche les zéros de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 - x \; .$$

1. Vérifier qu'il y a au moins un zéro α dans l'intervalle $[0, 2]$.
2. Écrire la méthode de Newton pour trouver le zéro α de la fonction $f(x)$ et calculer la première itération à partir de la valeur initiale $x^{(0)} = 1$.
3. Calculer les zéro α de la fonction f avec la méthode de Newton (fonction `newton` que vous devrez écrire)

```python
def  newton( F, dF, x0, tol, nmax ) :
    # NEWTON Find the zeros of a nonlinear equations.
    # NEWTON(F,DF,X0,TOL,NMAX) tries to find the zero X of the
    # continuous and differentiable function F nearest to X0 using
    # the Newton method. DF is a function which take X and return the
       derivative of F.
    # If the search fails an error message is displayed.
    #
    # returns the value of the
    # residual R in X,the number of iterations N required for computing
       X and
    # INC the increments computed by Newton.

    return x, r, n, inc
```

Choisir $x^{(0)} = 1$ comme points de départ pour la méthode et utiliser une tolérance *tol* $= 10^{-8}$ sur la valeur absolue de l'incrément [1] entre deux itérations successives $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$.

1. Dans le cas de la méthode de Newton l'incrément approche assez bien l'erreur commise.