Ens.: Simone Deparis
Analyse Numérique - (n/a)
12 août 2020
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- Vous ne pouvez utiliser que les calculatrices scientifiques non-programmables suivantes:
  - TI-30X II (B ou S) + TI-30 ECO RS
  - HP 10S – HP 10S+
  - ou des calculatrices encore plus simples.
- L'utilisation et la possession sur soi d'une autre calculatrice et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, suivez les indications dans le texte
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Répondez dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher dans les parties grises réservées au correcteur.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Problème 1 — Equations Différentielles Ordinaires

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -4y(t) + \cos(y(t)\pi)e^{-t}, & t > 3, \\ y(3) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

a) Cocher les bonnes réponses parmi les choix proposés.
(Bonne réponse 0.2 points, mauvaise -0.2, pas de réponse 0.)

Méthode	explicite	implicite	ordre 1	ordre 2	ordre 3	cond. stable	incond. stable
Heun	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Euler Retrograde	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Euler Progressif	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Crank–Nicholson	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

b) Ecrivez les schémas d'Euler progressif et rétrograde avec pas de temps h pour l'approximation numérique de $y(t)$.

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

c) Donnez une condition sur h afin que la méthde d'Euler progressive appliqué au problème (1) soit stable

Réservé au correcteur

d) Soit n fixé et u_n la valeur de la solution numérique au temps $t = t_n = nh$; on applique la méthode d'Euler retrograde et on veut trouver u_{n+1}. Vérifiez que u_{n+1} est la solution d'une équation de la forme

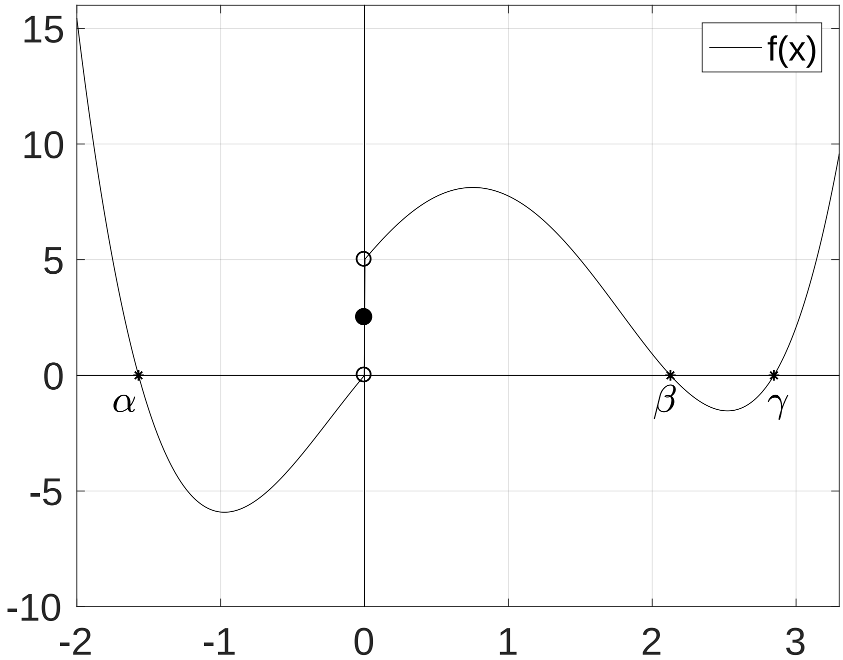
$$F(u_{n+1}) = 0. \tag{2}$$

Donnez la forme de F (en fonction de x : $F(x) = ...$) et écrire la rélation récursive qui définit les itérations $x^{(k)}$ de la méthode de Newton pour résoudre l'équation non-linéaire (2), avec la donnée initiale $x^{(0)} = u_n$. (Pas besoin de simplifier l'expression obtenue.)

Réservé au correcteur

Problème 2 — Equations Non-Linéaires

(a) Soit $f :\to \mathbb{R}$ la fonction représentée dans le graphique suivant. On veut utiliser la méthode de bissection pour calculer une approximation des zéros de f: α, β et γ.



Indiquez pour quels sous-intervalles la méthode de bissection peut effectivement être utilisée. Sur chaque intervalle où il est possible d'utiliser la méthode de bissection, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour trouver un zéro avec une erreur inférieure à 10^{-6}. (Bonne réponse 0.4 points, mauvaise 0.)

	0-1	4-5	16-17	18-19	20-21	22-23	bisection pas utilisable
$[-2, 3]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[-2, -0.5]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[1, 3]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[2, 2.5]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[-1, 1.5]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

On considère maintenant la fonction $g : [4, 12] \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \ln(x+1) - 2$. Cette fonction possède un seul zéro α dans $[4, 12]$.

b) Le zéro α est aussi un point fixe de $\varphi(x) = x - (\ln(x+1) - 2)$. Ecrivez la méthode du point fixe par rapport à la fonction φ.

Réservé au correcteur

c) Est-ce que la méthode du point fixe converge vers α ? Si oui, avec quel ordre ?

Réservé au correcteur

d) Supposons que $x^{(0)}$ soit choisi tel que $|\alpha - x^{(0)}| < 10^{-1}$. Trouvez le nombre d'itérations nécessaires pour que la méthode du point fixe donne une erreur de 10^{-6}.

Réservé au correcteur

Problème 3 — Systèmes Linéaires

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Sans écrire les matrices d'itérations, que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées à ce système linéaire ?

☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

b) On considère la méthode dite du gradient stationnaire préconditionné:

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que la matrice preconditionnée $P^{-1}A$ est symétrique définie positive et calculez la valeur optimale du paramètre α.

Réservé au correcteur

c) Calculez une borne de l'erreur en norme $\|\mathbf{v}\|_A = \sqrt{(A\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ par rapport à l'erreur initiale.

Réservé au correcteur

Problème 4 — Interpolation et approximation numériques

On veut approximer la fonction

$$f : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2\pi x)$$

par un polynôme de degré 2 qui interpole la fonction aux points $0, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}$.

a) Calculez la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.

Réservé au correcteur

b) Calculez le polynome d'interpolation de degré 2 associé aux points $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.

Réservé au correcteur

c) Quelle est l'erreur d'interpolation ?

Réservé au correcteur

On considère les mesures suivantes :

x	-3	1	2
$f(x)$	e^6	1	e^{-3}

Des biologistes supposent que le procédé est réglé par une loi de type $f(x) = C\, e^{-ax}$.

d) Déterminez les valeurs des constantes C et a.

Réservé au correcteur

Problème 5 : Intégration numérique

a) Donnez la définition de formule de quadrature en expliquant les notations.

Réservé au correcteur

b) Donnez la définition de dégré d'exactitude d'une formule de quadrature.

Réservé au correcteur

c) Démontrez le théorème suivant en complétant l'encadré.

Théorème (poids d'interpolation) Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.

J est exacte de degré $M-1 \Leftrightarrow$ $\boxed{\omega_j = \qquad\qquad\qquad j = 1, ..., M}$

Réservé au correcteur

Problème 6 : Code en Python

Complétez le code de la fonction Newton qui implémente la méthode de Newton. Des points sont dédiés aux commentaires.

Réservé au correcteur

```
def  Newton( F, dF, x0, tol, nmax ) :
    #
    # return x, r, n, inc
```

EDO

$$-\lambda_{max} \le \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \le -\lambda_{min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,p}|\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)} \ ,$$

$$\forall n = 0,\dots,N_h \quad |u_n - y(t_n)| \le C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \le h t_n \frac{1}{2} \max_{t\in[t_0,t_n]} |y''(t)|$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\right]$$

$$\dots = \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h f(t_n,u_n))\right]$$

Systèmes linéaires

$$B = P^{-1}(P-A) = I - P^{-1}A \quad , \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}$$

$$\begin{aligned} P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{z}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \le \left(\frac{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\mathbf{p}^{(k)^T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)^T} A \mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)} \\ P\mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k+1)} \\ \beta_k &= \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \le \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \, , \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \mathrm{Cond}\,(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j\ne k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x\in I} |E_n f(x)| \le \frac{1}{4(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x\in I} |\ E_1^H f(x)\ | \le \frac{H^2}{8} \max_{x\in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x\in I} |\ E_n^H f(x)\ | \le \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|\,.$$

Intégration numérique

$$J^{xx}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$J^{xx}(f) = (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$J^{xx}(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$|I(f) - I^c_{xx}(f)| \le \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I^c_{xx}(f)| \le \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I^c_{xx}(f)| \le \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)|$$

Equations non-linéaires

suggestions ?

XXXXXXX

$$C = \frac{\max |f''(x)|}{\min 2|f'(x)|}$$

XXXXXXX

En rouge les modifications pour 2021