

Problème 1 — Equations Différentielles Ordinaires

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -4y(t) + \cos(y(t)\pi)e^{-t}, & t > 3, \\ y(3) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

a) Cocher les bonnes réponses parmi les choix proposés.

(Bonne réponse 0.2 points, mauvaise -0.2, pas de réponse 0.)

Méthode	explicite	implicite	ordre 1	ordre 2	ordre 3	cond. stable	incond. stable
Heun	☒	☐	☐	☒	☐	☒	☐
Euler Retrograde	☐	☒	☒	☐	☐	☐	☒
Euler Progressif	☒	☐	☒	☐	☐	☒	☐
Crank-Nicholson	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☒

b) Ecrivez les schémas d'Euler progressif et rétrograde avec pas de temps h pour l'approximation numérique de $y(t)$.

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

Réservé au correcteur

Notons une approximation de y au temps t_n : $u_n \approx y(t_n)$ et soit $h > 0$ le pas de temps fixé; $t_n = t_0 + nh$ avec $t_0 = 3$; $n = 0, 1, \dots$

• Euler progressif:
$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = -4u_n + \cos(u_n \pi) e^{-t_n} \\ u_0 = y(t_0) = y(3) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} n = 0, 1, \dots \\ t_n = t_0 + nh \\ h > 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 4h u_n + h \cos(u_n \pi) e^{-t_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

• Euler rétrograde:
$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = -4u_{n+1} + \cos(u_{n+1} \pi) e^{-t_{n+1}} \\ u_0 = y(t_0) = y(3) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} n = 0, 1, \dots \\ t_n = t_0 + nh \\ h > 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 4h u_{n+1} + h \cos(u_{n+1} \pi) e^{-t_{n+1}} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

c) Donnez une condition sur h afin que la méthode d'Euler progressive appliquée au problème (1) soit stable



Réservé au correcteur

D'après la théorie, Euler progressive est stable si $h < \frac{2}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}$ où il existe $0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < +\infty$ tels que $\frac{\partial f}{\partial y} \in [\lambda_{\max}, \lambda_{\min}]$.

Ici on a $f(t, y(t)) = -4y(t) + \cos(y(t) \cdot \pi) e^{-t}$

donc $\frac{\partial f}{\partial y} = -4 - \pi e^{-t} \sin(y \cdot \pi)$

donc on a $-4 - \pi e^{-3} \leq \frac{\partial f}{\partial y} \leq \pi - 4 < 0$

$\forall t > 3, \forall y \in D_y$

al: Euler progressive stable $\Leftrightarrow \left[h < \frac{2}{4 + \pi e^{-3}} \right]$

d) Soit n fixé et u_n la valeur de la solution numérique au temps $t = t_n = nh$; on applique la méthode d'Euler retrograde et on veut trouver u_{n+1} . Vérifiez que u_{n+1} est la solution d'une équation de la forme

$$F(u_{n+1}) = 0. \quad (2)$$

Donnez la forme de F (en fonction de x : $F(x) = \dots$) et écrive la relation récursive qui définit les itérations $x^{(k)}$ de la méthode de Newton pour résoudre l'équation non-linéaire (2), avec la donnée initiale $x^{(0)} = u_n$. (Pas besoin de simplifier l'expression obtenue.)



Réservé au correcteur

On peut réécrire la méthode d'Euler retrograde sous la forme :

$$u_{n+1}(1 + 4h) - u_n - h \cos(u_{n+1} \cdot \pi) e^{-t_{n+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow F(u_{n+1}) = 0 \text{ avec } F(x) = x(1 + 4h) - u_n - h \cos(\pi x) e^{-t_{n+1}}$$

On utilise la méthode de Newton afin de résoudre cette équation non-linéaire : on pose $x = u_{n+1}$ et pour tout $k \geq 0$:

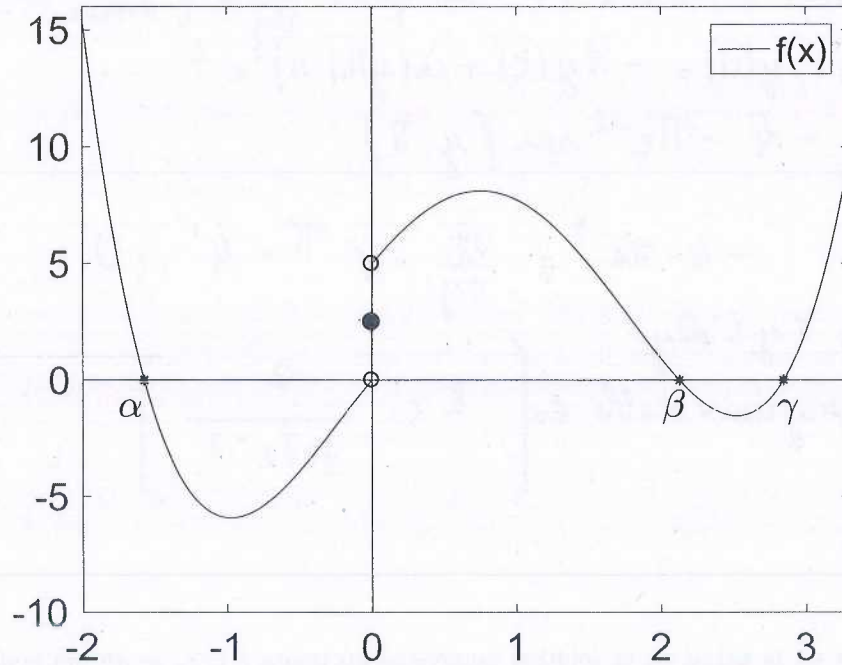
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)}(1 + 4h) - u_n - h \cos(\pi x^{(k)}) e^{-t_{n+1}}}{(1 + 4h) + h \pi \sin(\pi x^{(k)}) e^{-t_{n+1}}}$$

et $x^{(0)} = u_n$.

Problème 2 — Equations Non-Linéaires

4

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction représentée dans le graphique suivant. On veut utiliser la méthode de bisection pour calculer une approximation des zéros de f : α , β et γ .



Indiquez pour quels sous-intervalles la méthode de bisection peut effectivement être utilisée. Sur chaque intervalle où il est possible d'utiliser la méthode de bisection, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour trouver un zéro avec une erreur inférieure à 10^{-6} . (Bonne réponse 0.4 points, mauvaise 0.)

	0-1	4-5	16-17	18-19	20-21	22-23	bisection pas utilis- able
$[-2, 3]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$[-2, -0.5]$	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
$[1, 3]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$[2, 2.5]$	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐
$[-1, 1.5]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

On considère maintenant la fonction $g : [4, 12] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \ln(x+1) - 2$. Cette fonction possède un seul zéro α dans $[4, 12]$.

- b) Le zéro α est aussi un point fixe de $\varphi(x) = x - (\ln(x+1) - 2)$. Ecrivez la méthode du point fixe par rapport à la fonction φ .



Réservé au correcteur

- On utilise la méthode du point fixe pour approximer le zéro α de la fonction g dans $[4; 12]$.
- On définit une suite $\{x_k\}_{k \geq 0}$ pour approcher le point fixe α avec $x_0 \in [4; 12]$ ✓ et pour tout $k \geq 0$: ✓

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) = x^{(k)} - (\ln(x^{(k)} + 1) - 2) \quad \checkmark$$
- On vérifie que α est bien un point fixe de φ . En effet :

$$\varphi(\alpha) = \alpha - (\ln(\alpha + 1) - 2) = \alpha - g(\alpha) = \alpha.$$

- c) Est-ce que la méthode du point fixe converge vers α ? Si oui, avec quel ordre ?



Réservé au correcteur

- La fonction φ est continue et différentiable sur $[4; 12]$. ✓
- Analysons $\varphi'(x)$. On a : $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\varphi'(x) \neq 0$ pour $x \in [4; 12]$ et $\varphi'(x) > 0$ pour $x \in [4; 12]$ donc φ est croissante sur $[4; 12]$. Ainsi : $\varphi(4) = 4 - (\ln(4+1) - 2) \approx 4,39 \leq \varphi(x) \leq \varphi(12) = 12 - (\ln(12+1) - 2) \approx 11,4$
Donc on a $\varphi(x) \in [4; 12]$ pour tout $x \in [4; 12]$.
- De plus $\varphi''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc $\varphi'(x)$ croissante sur $[4; 12]$ donc
 $-\frac{4}{5} \leq \varphi'(4) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(12) = \frac{12}{13} < 1$ pour tout $x \in [4; 12]$ donc $|\varphi'(x)| < 1$ ✓
sur $[4; 12]$

On peut donc appliquer le critère de convergence globale. la suite $\{x_k\}_{k \geq 0}$ définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ converge vers α pour tout $x^{(0)} \in [4, 12]$.
 De plus on a vu que $\phi'(x) \neq 0 \ \forall x \in [4, 12]$. En particulier:
 $\phi'(\alpha) \neq 0$ donc la convergence sera linéaire. ✓

6

d) Supposons que $x^{(0)}$ soit choisi tel que $|\alpha - x^{(0)}| < 10^{-1}$. Trouvez le nombre d'itérations nécessaires pour que la méthode du point fixe donne une erreur de 10^{-6} .



Réservé au correcteur

d'après la théorie, on a $|x^{(k)} - \alpha| \leq C^k |x^{(0)} - \alpha|$ avec

$$C = \max_{x \in [4, 12]} |\phi'(x)| = \frac{12}{13}$$

$$\text{Donc } |x^{(k)} - \alpha| \leq \left(\frac{12}{13}\right)^k 10^{-1} \leq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(10^{-6}/10^{-1})}{\ln(12/13)} \approx 143,8$$

$$\text{Donc } \left[k \geq 144 \right] \text{ car } k \in \mathbb{N}.$$

Problème 3 — Systèmes Linéaires

On considère le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Sans écrire les matrices d'itérations, que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées à ce système linéaire ?



Réservé au correcteur

- On remarque que A est une matrice diagonale dominante stricte par lignes car $|3|, | -1 |$.
Ainsi, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes. ✓
- De plus on remarque que A est tridiagonale, les coefficients diagonaux sont tous non nuls et $\det(A) = 3 \times 3 - 1 = 8 \neq 0$ donc A n'est pas singulière. Alors on peut dire que $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$ donc la méthode de Gauss-Seidel convergera deux fois plus vite que celle de Jacobi. ✓

Alternative : A sdp (méthode de Sylvester) $\Rightarrow$ GS conv.
 A tridiag $\Rightarrow$ les deux conv. ou ne convergent pas

$$\left[\begin{array}{lll} 0 \text{ pt} & : & \text{GS conv.} \\ 1 \text{ pt} & : & \text{GS + J conv.} \\ 2 \text{ pt} & : & \text{vitesse de conv.} \end{array} \right]$$

b) On considère la méthode dite du gradient stationnaire préconditionné:

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que la matrice preconditionnée $P^{-1}A$ est symétrique définie positive et calculez la valeur optimale du paramètre α .



Réservé au correcteur

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

calculer les valeurs propres de $P^{-1}A$:

$$|P^{-1}A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ou } \lambda = \frac{4}{3}.$$

On remarque que $P^{-1}A$ est symétrique et toutes les valeurs propres sont strictement positives donc $P^{-1}A$ est symétrique définie positive. ✓

d'après la théorie on a: $\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}}} = \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}$
 ainsi $\left[\alpha_{\text{opt}} = 1 \right]$ ✓

c) Calculez une borne de l'erreur en norme $\|\mathbf{v}\|_A = \sqrt{(A\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ par rapport à l'erreur initiale.



k

Réservé au correcteur

$$\text{On a: } \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\text{avec } K(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{\text{max}}}{\lambda_{\text{min}}} = 2$$

$$\text{donc: } \left[\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{1}{3} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \right] \checkmark$$

Problème 4 — Interpolation et approximation numériques

On veut approximer la fonction

$$f : \left[0, \frac{1}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(2\pi x)$$

par un polynôme de degré 2 qui interpole la fonction aux points $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.

- a) Calculez la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.



Réservé au correcteur

Calculons la base de Lagrange de $\mathcal{P}_2$ associée aux points $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{1}{8}$;

$$x_2 = \frac{1}{4}.$$

$$\phi_0(x) = \frac{(x - \frac{1}{8})(x - \frac{1}{4})}{(-\frac{1}{8})(-\frac{1}{4})} = 32 \left(x - \frac{1}{8} \right) \left(x - \frac{1}{4} \right) = 32 \left(x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{32} \right) \checkmark$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{4})}{(\frac{1}{8})(\frac{1}{8} - \frac{1}{4})} = -64 x \left(x - \frac{1}{4} \right) = -64 \left(x^2 - \frac{x}{4} \right)$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{8})}{(\frac{1}{4})(\frac{1}{4} - \frac{1}{8})} = 32 x \left(x - \frac{1}{8} \right) = 32 \left(x^2 - \frac{x}{8} \right) \checkmark$$

b) Calculez le polynôme d'interpolation de degré 2 associé aux points $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.

10



Réservé au correcteur

Notons $\Pi_2 f$ le polynôme d'interpolation de degré 2 de f aux points $x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{8}; x_2 = \frac{1}{4}$.

$$\text{Avec } \Pi_2 f(x) = f(0)\phi_0(x) + f\left(\frac{1}{8}\right)\phi_1(x) + f\left(\frac{1}{4}\right)\phi_2(x)$$

$$\text{avec } f(0) = 0; f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } f\left(\frac{1}{4}\right) = 1.$$

$$\text{Donc } \Pi_2 f(x) = -32\sqrt{2}\left(x^2 - \frac{x}{4}\right) + 32\left(x^2 - \frac{x}{8}\right) \\ \left[= 32(1-\sqrt{2})x^2 + (-4+8\sqrt{2})x \right] \checkmark$$

c) Quelle est l'erreur d'interpolation ?



Réservé au correcteur

D'après la théorie on a :

$$\max_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |E_2 f(x)| = \max_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |f(x) - \Pi_2 f(x)| \leq \frac{1}{6} H^3 \max_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |f^{(3)}(x)|$$

$$\text{avec } H = \frac{b-a}{n} = \frac{1/4}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{et } \begin{cases} f'(x) = 2\pi \cos(2\pi x) \\ f''(x) = -4\pi^2 \sin(2\pi x) \\ f'''(x) = -8\pi^3 \cos(2\pi x) \end{cases}$$

$$\text{donc } \max_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |f^{(3)}(x)| = 8\pi^3 \checkmark$$

$$\text{Donc } \left[\max_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |E_2 f(x)| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 8\pi^3 = \frac{\pi^3}{384} \right] \checkmark (\approx 8,07 \cdot 10^{-2}).$$

On considère les mesures suivantes :

x	-3	1	2
$f(x)$	e^6	1	e^{-3}

Des biologistes supposent que le procédé est réglé par une loi de type $f(x) = C e^{-ax}$.

d) Déterminez les valeurs des constantes C et a .



Réservé au correcteur

On a : $\ln(f(x)) = \ln(C e^{-ax}) = \ln(C) - ax = a_0 + a_1 x$

avec $a_0 = \ln(C)$ et $a_1 = -a$.

de plus :

x	-3	1	2
$\ln(f(x))$	6	0	-3

✓ on cherche alors avec la

méthode des moindres carrés le polynôme de degré 1 : $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x$ qui approche au mieux les données (les 3 couples $(x_i, \ln(f(x_i)))$ $i \in \{0, 1, 2\}$).

$$\Phi(a) = \sum_{i=0}^2 | \ln(f(x_i)) - a_0 - a_1 x_i |^2$$

$$= | 6 - a_0 + 3a_1 |^2 + | -a_0 - a_1 |^2 + | -3 - a_0 - 2a_1 |^2$$

$$\cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = -2(6 - a_0 + 3a_1) - 2(-a_0 - a_1) - 2(-3 - a_0 - 2a_1)$$

$$= -6 + 6a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 1$$

$$\cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 6(6 - a_0 + 3a_1) - 2(-a_0 - a_1) - 4(-3 - a_0 - 2a_1) \quad \checkmark$$

$$= 48 + 28a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{12}{7}$$

Donc $\left[C = e^{a_0} = e^1 \text{ et } a = \frac{12}{7} \right] \checkmark$

Donc $\left[f(x) = e^1 e^{-\frac{12}{7}x} = e^{1 - \frac{12}{7}x} \right]$

Problème 5 : Intégration numérique

a) Donnez la définition de formule de quadrature en expliquant les notations.



Réservé au correcteur

Soit $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1, 1]$.

Une formule de quadrature $J(g)$ essaye d'approximer $\int_{-1}^1 g(t) dt$.

Étant donné : M points d'intégration $-1 \leq t_1 < \dots < t_M \leq 1$

et M poids d'intégration $w_1, \dots, w_M$. Elle s'écrit :

$$J(g) = \sum_{k=1}^M w_k g(t_k).$$

b) Donnez la définition de degré d'exactitude d'une formule de quadrature.



Réservé au correcteur

Une formule de quadrature est exacte de degré n si et seulement si $\int_{-1}^1 p(t) dt = J(p)$ pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à n .

c) Démontrez le théorème suivant en complétant l'encadré.

13

Théorème (poids d'interpolation) Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.

J est exacte de degré $M-1 \Leftrightarrow \omega_j = \int_{-1}^1 \phi_j(t) dt, j=1, \dots, M$



Réservé au correcteur

Soit $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, M}$ les polynômes de la base de Lagrange des polynômes de degré $M-1$ associée aux points $t_1, \dots, t_M$ et soit $p \in P_{M-1}$.

Alors on peut écrire : $p(t) = \sum_{k=1}^M p(t_k) \phi_k(t)$ [interpolation de Lagrange].

Par linéarité : $\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{k=1}^M p(t_k) \int_{-1}^1 \phi_k(t) dt$ et ✓

$J(p) = \sum_{k=1}^M p(t_k) J(\phi_k) \stackrel{[def.]}{=} \sum_{k=1}^M p(t_k) \omega_k.$

• Si $\omega_k = \int_{-1}^1 \phi_k(t) dt$ alors on a : $J(p) = \sum_{k=1}^M p(t_k) \int_{-1}^1 \phi_k(t) dt = \int_{-1}^1 p(t) dt$ et la formule de quadrature $J(p)$ est exacte de degré $M-1$. ✓

• Si $J(p)$ est exacte de degré $M-1$, alors $\forall \phi \in P_{M-1}$, le polynôme de la base de Lagrange ($\phi \in P_{M-1}$) on a : $\int_{-1}^1 \phi(t) dt = J(\phi)$
 $= \sum_{k=1}^M \phi(t_k) \omega_k = \sum_{k=1}^M \delta_{ke} \omega_k = \omega_e$. ✓

• ℳℳ : J est exacte de degré $M-1 \Leftrightarrow \omega_j = \int_{-1}^1 \phi_j(t) dt, j=1, \dots, M.$

⚠ $\Rightarrow \phi_e \in P_{M-1} \Rightarrow \int_{-1}^1 \phi_e(t) dt = J(\phi_e)$ } 1 pt
 si ça pas claire et autre
 petite fautive (-1)

Problème 6 : Code en Python

Complétez le code de la fonction Newton qui implémente la méthode de Newton. Des points sont dédiés aux commentaires.



Réservé au correcteur

```
def Newton( F, dF, x0, tol, nmax ) :
    #
    # return x, r, n, inc
```

```
-def Newton( F, dF, x0, tol, nmax ):
```

Newton trouve le zéro d'équations non linéaires. Newton approxime
la racine x de la fonction continue et différentiable F au voisinage
de x_0 .
dF est une fonction qui prend x et retourne la dérivée de F
tol est la tolérance pour l'incrément
$nmax$ est le nombre maximal d'itérations pour calculer x .
Outputs:
x : le zéro approximé de F calculé par Newton
n : la valeur absolue du résidu en x
n : le nombre d'itération requis pour calculer x
inc : les incréments en valeur absolue à chaque itération ✓

```
n = 0
x = x0
inc = []
diff = tol + 1 # initially set larger than tolerance
while (n < nmax and diff > tol) # loop until tolerance is reached ✓
    deltax = F(x) / dF(x)
    x1 = x - deltax
    ✓ diff = mp.abs(deltax) # test increment
    inc.append(diff)
    x = x1
    n = n + 1
```

$r = \text{np.abs}(F(x))$ # final residual

✓ if ($n > n_{\text{max}}$):

print('Newton stopped without converging to the desired tolerance
because the maximum number of iteration was reached.')

return x, r, n, inc

EDO

$$-\lambda_{\max} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leq -\lambda_{\min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1, \dots, p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)},$$

$$\forall n = 0, \dots, N_h \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \leq h t_n \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, t_n]} |y''(t)|$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$

$$\dots = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))]$$

Systèmes linéaires

$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A, \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}(P^{-1}A) + \lambda_{\max}(P^{-1}A)}$$

$$P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{z}^{(k)}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{\text{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\text{Cond}(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)}$$

$$P\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)}$$

$$\beta_k = \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

16

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x \in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x \in I} |E_1^H f(x)| \leq \frac{H^2}{4} \max_{x \in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x \in I} |E_n^H f(x)| \leq \frac{H^{n+1}}{2(n+1)} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Intégration numérique

$$J^{xx}(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$J^{xx}(f) = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$J^{xx}(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x \in [a,b]} |f''''(x)|$$

Equations non-linéaires

$$C = \frac{\max |f''(x)|}{\min 2|f'(x)|}$$

Problème 1 — Equations Différentielles Ordinaires

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -4y(t) + \cos(y(t)\pi)e^{-t}, & t > 3, \\ y(3) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

a) Cocher les bonnes réponses parmi les choix proposés.

(Bonne réponse 0.2 points, mauvaise -0.2, pas de réponse 0.)

Méthode	explicite	implicite	ordre 1	ordre 2	ordre 3	cond. stable	incond. stable
Heun	☒	☐	☐	☒	☐	☒	☐
Euler Retrograde	☐	☒	☒	☐	☐	☐	☒
Euler Progressif	☒	☐	☒	☐	☐	☒	☐
Crank-Nicholson	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☒

b) Ecrivez les schémas d'Euler progressif et rétrograde avec pas de temps h pour l'approximation numérique de $y(t)$.

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☒

Réservé au correcteur

Euler Progressif:

$h > 0$ fixé

$t_n = t_0 + n h$

$n = 0, 1, \dots$ ✓

stable conditionnellement

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = -4u_n + \cos(u_n \pi) e^{-t_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(1 - 4h) + h \cos(u_n \pi) e^{-t_n} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \checkmark$$

Euler Retrograde

$h > 0$ fixé

$t_n = t_0 + n h$

$n = 0, 1, \dots$ ✓

stable inconditionnellement

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = -4u_{n+1} + \cos(u_{n+1} \pi) e^{-t_{n+1}} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1}(1 + 4h) = h \cos(u_{n+1} \pi) e^{-t_{n+1}} + u_n \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \checkmark$$

c) Donnez une condition sur h afin que la méthode d'Euler progressive appliquée au problème (1) soit stable

3



Réservé au correcteur

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -4 - \pi \sin(y\pi) e^{-t}$$

$$t > 3, \quad e^{-t} \in]0; e^{-3}[\quad \sin(y\pi) \in [-1; 1]$$

on cherche $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < \infty$ tels que $- \lambda_{\max} \leq \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \leq - \lambda_{\min}$
 $\forall t > 3, \forall y \in \mathbb{R}$

avec $\sin(y\pi) \in [-1; 1]$, $\pi \sin(y\pi) \in [-\pi; \pi]$, le plus grand intervalle que l'on peut trouver avec $\pi \sin(y\pi) e^{-t}$ est $]-\pi e^{-3}; \pi e^{-3}[$

donc $-4 - \pi \sin(y\pi) e^{-t} \in]-4 - \pi e^{-3}; -4 + \pi e^{-3}[$ pour tout t et y .
 $\approx]-4,16; -3,84[\leftarrow \lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ tout y .

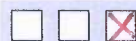
On a alors borné $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on peut prendre $\lambda_{\max} = 4 + \pi e^{-3}$

Ainsi la condition sur h est $0 < h < (2/(4 + \pi e^{-3})) \approx 0,48$ ✓

d) Soit n fixé et u_n la valeur de la solution numérique au temps $t = t_n = nh$; on applique la méthode d'Euler retrograde et on veut trouver u_{n+1} . Vérifiez que u_{n+1} est la solution d'une équation de la forme

$$F(u_{n+1}) = 0. \quad (2)$$

Donnez la forme de F (en fonction de x : $F(x) = \dots$) et écrive la relation récursive qui définit les itérations $x^{(k)}$ de la méthode de Newton pour résoudre l'équation non-linéaire (2), avec la donnée initiale $x^{(0)} = u_n$. (Pas besoin de simplifier l'expression obtenue.)



Réservé au correcteur

Euler retrograde : $u_{n+1} = u_n - 4h u_{n+1} + h \cos(u_{n+1}\pi) e^{-t_{n+1}}$

$$0 = u_{n+1} - u_n + 4h u_{n+1} - h \cos(u_{n+1}\pi) e^{-t_{n+1}}$$

$$0 = F(u_{n+1}) \quad \checkmark$$

avec $F(x) = x - u_n + 4h x - h \cos(\pi x) e^{-t_{n+1}}$
 $= (1 + 4h)x - u_n - h \cos(\pi x) e^{-t_{n+1}} \quad \checkmark$

$$F'(x) = 1 + 4h + h\pi \sin(\pi x) e^{-t_{n+1}}$$

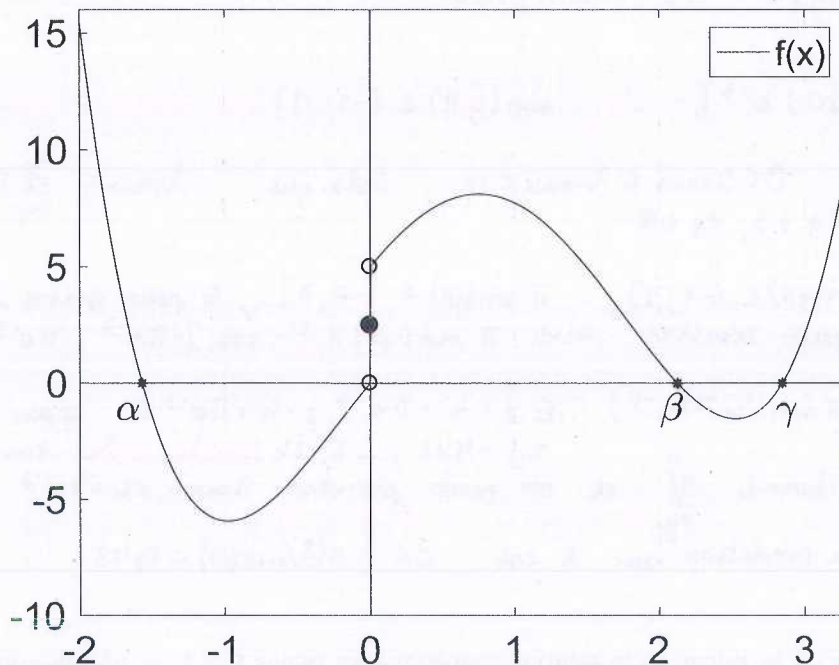
méthode de Newton :
 $\{x^k\}_{k=0,1,\dots, n+1}$ donné
 définie par :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{(1+4h)x^k - u_n - h \cos(\pi x^k) e^{-t_{n+1}}}{1 + 4h + h\pi \sin(\pi x^k) e^{-t_{n+1}}} \\ x^0 = u_n \quad \checkmark \end{cases}$$

Problème 2 — Equations Non-Linéaires

4

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction représentée dans le graphique suivant. On veut utiliser la méthode de bisection pour calculer une approximation des zéros de f : α , β et γ .



Indiquez pour quels sous-intervalles la méthode de bisection peut effectivement être utilisée. Sur chaque intervalle où il est possible d'utiliser la méthode de bisection, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour trouver un zéro avec une erreur inférieure à 10^{-6} . (Bonne réponse 0.4 points, mauvaise 0.)

	0-1	4-5	16-17	18-19	20-21	22-23	bisection pas utilis- able
$[-2, 3]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒
$[-2, -0.5]$	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
$[1, 3]$	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
$[2, 2.5]$	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐
$[-1, 1.5]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

$$|\alpha - x^k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \leq 10^{-6}$$

$$\frac{\ln(b-a) 10^6}{\ln(2)} - 1 \leq k$$

On considère maintenant la fonction $g : [4, 12] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \ln(x+1) - 2$. Cette fonction possède un seul zéro α dans $[4, 12]$.

- b) Le zéro α est aussi un point fixe de $\varphi(x) = x - (\ln(x+1) - 2)$. Ecrivez la méthode du point fixe par rapport à la fonction φ .



Réservé au correcteur

En considérant la fonction φ , la méthode du point fixe est définie par la suite $\{x^k\}_{k=0,1,\dots}$ avec $x^{k+1} = \varphi(x^k)$
 $x^{k+1} = x^k - (\ln(x^k+1) - 2)$
 et $x_0 \in [4; 12]$

- c) Est-ce que la méthode du point fixe converge vers α ? Si oui, avec quel ordre?



Réservé au correcteur

α tel que $g(\alpha) = 0 = \ln(\alpha+1) - 2 \Leftrightarrow 2 = \ln(\alpha+1) \Leftrightarrow e^2 - 1 = \alpha$
 - $\varphi(\alpha) = \alpha - (\ln(\alpha+1) - 2) = \alpha - g(\alpha) = \alpha - 0 = \alpha$, α bien un point fixe de φ
 - $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \rightarrow$ croissant strictement et continue sur $[4; 12]$
 - $\varphi''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in [4; 12]$ $\varphi'(x) \in [4/5; 12/13]$

On a $\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{e^2-1+1} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,86$ donc $|\varphi'(\alpha)| < 1$

Et même, φ continue sur $[4; 12]$ et il existe $k < 1$ tel que $|\varphi'(x)| \leq k$ pour tout x de $[4; 12]$

La méthode du point fixe converge vers α avec un ordre 1.

- d) Supposons que $x^{(0)}$ soit choisi tel que $|\alpha - x^{(0)}| < 10^{-1}$. Trouvez le nombre d'itérations nécessaires pour que la méthode du point fixe donne une erreur de 10^{-6} .



Réservé au correcteur

On a une convergence linéaire telle que

$$|\alpha - x^k| \leq K |\alpha - x^{k-1}| \quad (K \text{ défini à la question précédente})$$

on peut aussi écrire $|\alpha - x^k| \leq K^k |\alpha - x_0|$ ✓

$$K = \max_{x \in [4;12]} |\varphi'(x)| = \frac{12}{13}$$

$$\text{donc } |\alpha - x^k| \leq K^k |\alpha - x_0| \leq K^k 10^{-1} \leq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow K^k 10^{-1} \leq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow K^k \leq 10^{-5} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow k \ln(K) \leq \ln(10^{-5})$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(10^{-5})}{\ln\left(\frac{12}{13}\right)} = 143,8$$

$$k \text{ minimum} = \underline{144} \quad \checkmark$$

Problème 3 — Systèmes Linéaires

On considère le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Sans écrire les matrices d'itérations, que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées à ce système linéaire ?



Réservé au correcteur

A est une matrice à diagonale dominante stricte, en effet, sur chaque ligne la valeur absolue du coefficient diagonal est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres coefficients. Ici, on a $l_1: |3| > |-1| = 1$ $l_2: |3| > |-1| = 1$ } $3 > 1$

Ce critère est suffisant pour dire que les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel convergent. ✓

A triangulaire

b) On considère la méthode dite du gradient stationnaire préconditionné:

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha(b - Ax^{(k)}) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que la matrice preconditionnée $P^{-1}A$ est symétrique définie positive et calculez la valeur optimale du paramètre α .



Réservé au correcteur

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1}A$ est symétrique et ses mineurs principaux sont $1 > 0$ et $1 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9} > 0$, ainsi d'après le critère de Sylvester on peut affirmer que $P^{-1}A$ est symétrique définie positive. ✓

Pour Richardson stationnaire $\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min}(P^{-1}A) + \lambda_{\max}(P^{-1}A)}$

valeurs propres de $P^{-1}A$: λ tq $(1-\lambda)^2 - \frac{1}{9} = 0$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \frac{1}{3} \quad \lambda_1 = \frac{4}{3} \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} = 1 \quad \checkmark \quad (\text{Avec cela Richardson stationnaire converge})$$

c) Calculez une borne de l'erreur en norme $\|v\|_A = \sqrt{(Av, v)}$ par rapport à l'erreur initiale.



Réservé au correcteur

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \left(\frac{\text{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\text{Cond}(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x\|_A$$

$$\text{Cond}(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{\max}(P^{-1}A)}{\lambda_{\min}(P^{-1}A)} = 2$$

$$\frac{\text{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\text{Cond}(P^{-1}A) + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\|e^k\|_A \leq \left(\frac{1}{3} \right)^k \|e^0\|_A$$

$$\begin{aligned} \|e^k\|_A &\leq \left(\frac{1}{3} \right)^k \sqrt{\begin{pmatrix} e_{01} & e_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{01} \\ e_{02} \end{pmatrix}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^k \sqrt{\begin{pmatrix} e_{01} & e_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e_{01} - e_{02} \\ -e_{01} + 3e_{02} \end{pmatrix}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^k \sqrt{3e_{01}^2 - 2e_{01}e_{02} - e_{01}e_{02} + 3e_{02}^2} \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^k \sqrt{3e_{01}^2 - 2e_{01}e_{02} + 3e_{02}^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Problème 4 — Interpolation et approximation numériques

On veut approximer la fonction

$$f : \left[0, \frac{1}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(2\pi x)$$

par un polynôme de degré 2 qui interpole la fonction aux points $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.

- a) Calculez la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.



Réservé au correcteur

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{8}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-\frac{1}{8})(x-\frac{1}{4})}{\frac{1}{32}} = 32(x-\frac{1}{8})(x-\frac{1}{4}) \\ &= 32\left(x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\right) \\ &= 32x^2 - 12x + 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-\frac{1}{4})}{\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}} = -64x(x-\frac{1}{4}) \\ &= -64x^2 + 16x \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-\frac{1}{8})}{\frac{1}{32}} = 32x(x-\frac{1}{8}) \\ &= 32x^2 - 4x \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Calculez le polynôme d'interpolation de degré 2 associé aux points $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$.



Réservé au correcteur

$$\begin{aligned}
 \Pi_2 f &= \sum_{k=0}^2 f(x_k) \varphi_k(x) \\
 &= f(x_0) \varphi_0(x) + f(x_1) \varphi_1(x) + f(x_2) \varphi_2(x) \\
 &= \sin(0) \varphi_0(x) + \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) \varphi_1(x) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \varphi_2(x) \\
 &= 0 \cdot \varphi_0(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi_1(x) + 1 \varphi_2(x) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-64x^2 + 16x) + 32x^2 - 4x \\
 &= -\sqrt{2} 32x^2 + \sqrt{2} 8x + 32x^2 - 4x \\
 &= (32 - \sqrt{2} \cdot 32)x^2 + (\sqrt{2} \cdot 8 - 4)x \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

c) Quelle est l'erreur d'interpolation ?

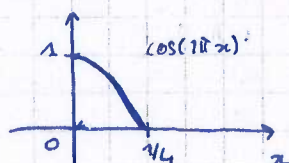


Réservé au correcteur

$$\max_{x \in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} h^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)| : \max_{x \in [0; \frac{1}{4}]} |E_2 f(x)| \leq \frac{1}{6} h^3 \max_{x \in [0; \frac{1}{4}]} |f'''(x)|$$

ici n , le degré du polynôme d'interpolation est 2. , $I = [0; \frac{1}{4}]$ $h = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$$f'(x) = 2\pi \cos(2\pi x) ; f''(x) = -(2\pi)^2 \sin(2\pi x) ; f'''(x) = -(2\pi)^3 \cos(2\pi x)$$



$$\cos(\pi x) \in [0; 1] \text{ pour } x \in [0; \frac{1}{4}]$$

$$\text{donc } f'''(x) \in [-(2\pi)^3; 0] = [-8\pi^3; 0]$$

$$\text{et } |f'''(x)| \leq 8\pi^3 \text{ pour } x \in [0; \frac{1}{4}] \quad \checkmark$$

$$\max_{x \in [0; \frac{1}{4}]} |E_2 f(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 8\pi^3 = \frac{1}{6 \cdot 8^2} \pi^3 = \frac{\pi^3}{384} \quad \checkmark$$

On considère les mesures suivantes :

x	-3	1	2
$f(x)$	e^6	1	e^{-3}

Des biologistes supposent que le procédé est réglé par une loi de type $f(x) = C e^{-ax}$.

d) Déterminez les valeurs des constantes C et a .



Réservé au correcteur

supposons $C > 0$

$$f(x) = C e^{-ax} \quad (\Leftrightarrow) \quad \ln(f(x)) = \ln(C \cdot e^{-ax}) = \ln(C) + (-ax) = \ln(C) - ax$$

x	-3	1	2
$\ln(f(x))$	6	0	-3

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ln(C) \\ -a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = B \vec{a}$$

Au sens des moindres carrés: $B^T B \vec{a} = B^T \vec{y}$ peut être résolu.

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B^T \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(C) \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 \ln(C) = 3 \\ -14a = -24 \end{cases}$$

$$\ln(C) = \frac{3}{3} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{C = e}$$

$$a = \frac{-24}{-14} = \frac{12}{7} \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{a = \frac{12}{7}}$$

C est bien > 0 .

Problème 5 : Intégration numérique

a) Donnez la définition de formule de quadrature en expliquant les notations.



Réservé au correcteur

Soit $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}^0([-1; 1])$ une formule de quadrature, J_g , essaie d'approcher $\int_{-1}^1 g(t) dt$.

soient M points d'intégration $t_k : -1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_M \leq 1$
et M poids w_k $k = 1, 2, \dots, M$

la formule de quadrature est $J_g(t) = \sum_{k=1}^M w_k g(t_k)$

b) Donnez la définition de degré d'exactitude d'une formule de quadrature.



Réservé au correcteur

Une formule de quadrature est exacte de degré n si pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à n ,

on a $J_p(t) = \int_{-1}^1 p(t) dt$.

c) Démontrez le théorème suivant en complétant l'encadré.

Théorème (poids d'interpolation) Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.

J est exacte de degré $M-1 \Leftrightarrow \omega_j = \int_{-1}^1 \psi_j(t) dt \quad j=1, \dots, M$
 ψ_j polynômes de la base de Lagrange



Réservé au correcteur

Soit $\{\psi_k\}_{k=1, \dots, M}$ les polynômes de la base de Lagrange associés aux points $t_1, t_2, \dots, t_M$. Soit un polynome $p \in \mathbb{P}_{M-1}$
 $p(t) = \Pi_{M-1}(t) = \sum_{k=1}^M p(t_k) \psi_k(t)$ (interpolation polynomiale)

aussi $\int_{-1}^1 p(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1}^M p(t_k) \psi_k(t) \right) dt$ ✓

* Si $w_k = \int_{-1}^1 \psi_k(t) dt$ alors $J_p(t) = \sum_{k=1}^M w_k p(t_k) = \sum_{k=1}^M \left(\int_{-1}^1 \psi_k(t) dt \right) p(t_k)$
 $= \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1}^M p(t_k) \psi_k(t) \right) dt = \int_{-1}^1 p(t) dt$

donc J est exacte de degré $M-1$. ✓

* Si J est exacte de degré $M-1$, alors pour ψ_l $l=1, \dots, M$, polynome de la base de Lagrange qui est de degré $M-1$, ✓

$$\int_{-1}^1 \psi_l(t) dt = J_{\psi_l}(t) = \sum_{k=1}^M w_k \psi_l(t_k) = \sum_{k=1}^M w_k \delta_{kl} = w_l \quad \checkmark$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} = 1 & \text{si } k=l \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème 6 : Code en Python

14

Complétez le code de la fonction Newton qui implémente la méthode de Newton. Des points sont dédiés aux commentaires.



boucle



init + final



commentaires

Réservé au correcteur

```
def Newton( F, dF, x0, tol, nmax ) :
```

```
#
```

```
# return x, r, n, inc
```

```
# Methode pour approcher la solution d'une equation
# non linéaire, cette fonction approche le zéro de la
# fonction F la plus proche de x0 à l'aide de la méthode de Newton
# inputs : F : fonction dont on cherche le zéro
#          dF : dérivée de F
#          x0 : terme initial de la méthode itérative de Newton
#          tol : tolérance à atteindre avant d'arrêter les itérations
#          nmax : nombre d'itérations maximum autorisé.
# outputs  x : approximation du zéro de F
#          r : norme du résidu final
#          n : nombre d'itérations faites
#          inc : vecteur des incréments qui sont une bonne approxi-
#                -mation de l'erreur à chaque itération ✓

# initialisation ✓
x = x0
n = 0
inc = []
# variable pour stocker le dernier incrément, à comparer avec tol pour
# la condition d'arrêt, initialisée à tol+1 afin d'entrer dans la boucle ✓
diff = tol + 1

while ( diff >= tol and n <= nmax ) :
    # Newton
    deltax = F(x) / dF(x)
    x = x - deltax
    # incrément
    diff = np.abs(deltax)
    inc.append(diff)
    # prochaine boucle
```

```
n = n + 1
# résidu : écart entre ce que l'on cherche, le zéro, et ce que l'on a trouvé ✓
r = np.abs(F(x)) # |0 - F(zéro)|
# informations en cas de non convergence
if (n > nmax):
    print(' la methode de Newton n a pas converger avec le
          maximum d iterations désiré et la tolérance désirée') ✓
return x, r, n, np.array(linc)
```

EDO

$$-\lambda_{\max} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leq -\lambda_{\min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1, \dots, p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)},$$

$$\forall n = 0, \dots, N_h \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \leq h t_n \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, t_n]} |y''(t)|$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$

$$\dots = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))]$$

Systèmes linéaires

$$B = P^{-1}(P \quad A) = I \quad P^{-1}A, \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}(P^{-1}A) + \lambda_{\max}(P^{-1}A)}$$

$$P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{z}^{(k)}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{\text{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\text{Cond}(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)}$$

$$P\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)}$$

$$\beta_k = \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x \in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x \in I} |E_1^H f(x)| \leq \frac{H^2}{4} \max_{x \in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x \in I} |E_n^H f(x)| \leq \frac{H^{n+1}}{2(n+1)} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Intégration numérique

$$J^{xx}(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$J^{xx}(f) = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$J^{xx}(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)|$$

Equations non-linéaires

$$C = \frac{\max |f''(x)|}{\min 2|f'(x)|}$$