Problème 1 : Équations différentielles ordinaires (8.4 points)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -4y(t) + \arctan(y(t))e^{-t}, & t > 2, \\ \\ y(2) = -3, \end{cases}$$

Pour rappel, la dérivée de $\arctan(x)$ est $\frac{1}{1+x^2}$.

2.4p **1a** Voici quelques méthodes d'approximations d'équations différentielles ordinaires. Sous chaque colonne, écrivez respectivement si c'est implicite ou explicite, donnez l'ordre, et si c'est conditionnellement stable, inconditionnellement stable, ou instable.
(Bonne réponse 0.2, mauvaise 0, pas de réponse 0).

Méthode	Explicite/Implicite	Ordre de convergence	Stabilité
Euler Progressive			
Euler Retrograde			
Heun			
Crank-Nicholson			

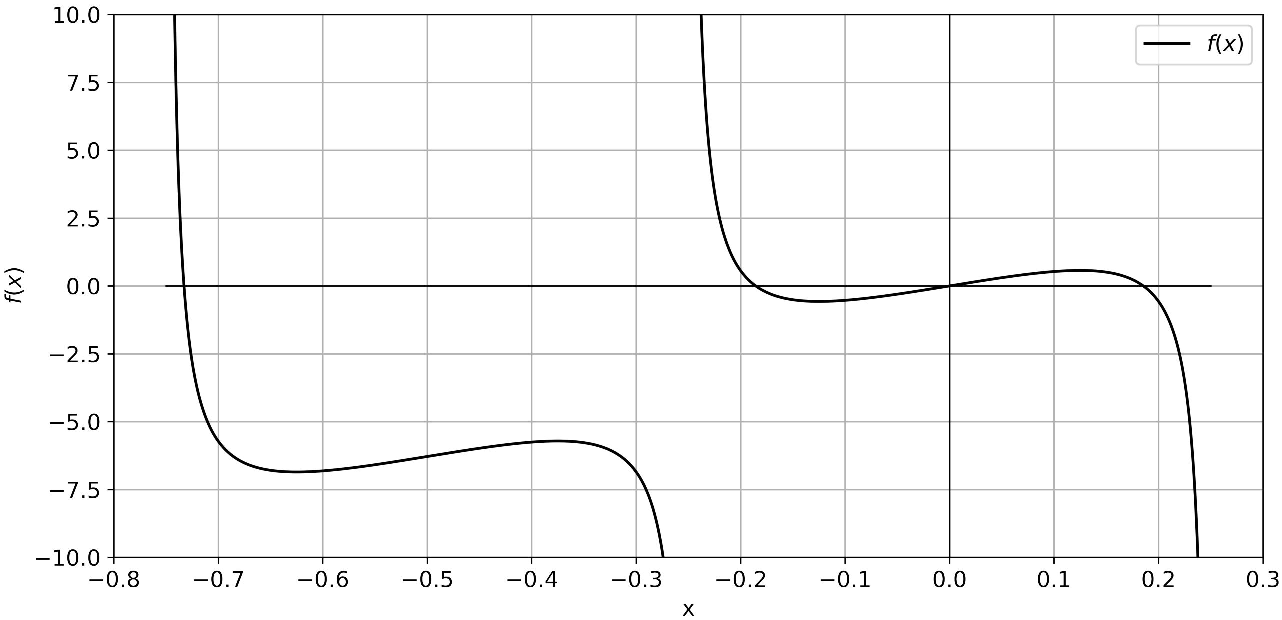
2p **1b** Écrivez le schéma de Crank-Nicholson pour l'approximation numérique de $y(t)$.

2p **1c** Donnez une condition sur h afin que la méthode d'Euler Progressive appliquée au problème de Cauchy mentionné soit stable.

2p **1d** Soit n fixé et u_n la valeur de la solution numérique au temps $t = t_n$; on applique la méthode d'Euler Retrograde et on veut trouver u_{n+1}. Vérifiez que u_{n+1} est la solution d'une équation de la forme $F(u_{n+1}) = 0$.
Donnez la forme de F (en fonction de x : $F(x) = ...$) et écrivez la relation récursive qui définit les itérations $x^{(k)}$ de la méthode de Newton pour résoudre l'équation non-linéaire avec donnée initiale $x^{(0)} = u_n$. (Pas besoin de simplifier l'expression obtenue.)

Problème 2 : Équations non linéaires (4 points)

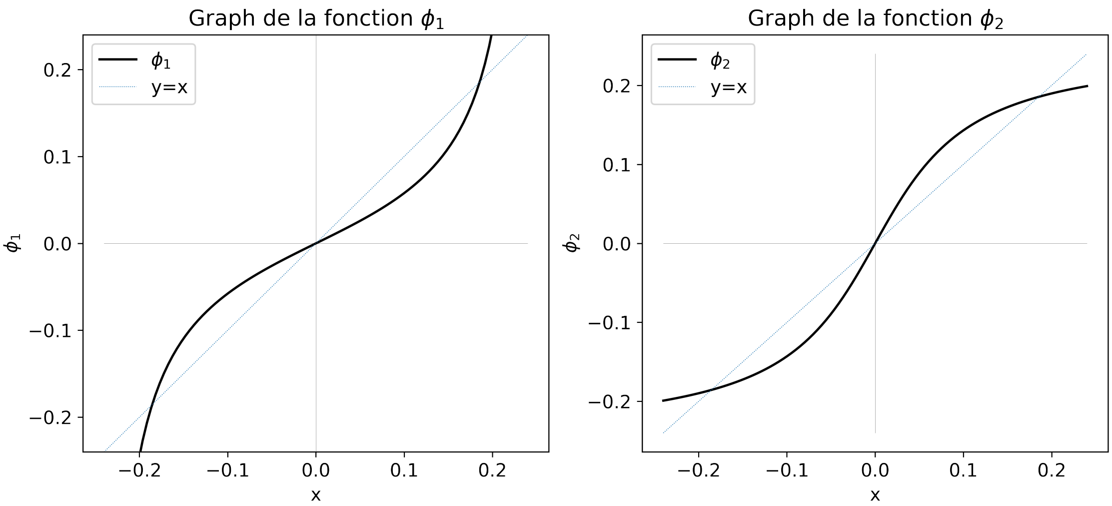
Soit $f : [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ la fonction représentée dans le graphique suivant. On veut utiliser la méthode de bissection pour calculer une approximation des zéros de f.



2p **2a** Pour chaque intervalle où il est possible d'utiliser la méthode de bissection, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour trouver un zéro avec une erreur inférieure à 10^{-6}. Autrement, précisez par une croix dans la dernière colonne qu'elle n'est pas utilisable.(Bonne réponse 0.4 points, mauvaise ou pas de réponse 0 points.)

[a,b]	# itérations	pas utilisable
[-0.7, -0.4]		
[-0.4, -0.2]		
[-0.2, -0.1]		
[-0.2, 0.1]		
[0.1, 0.2]		

2p **2b** La fonction du graphique précédent a un seul zéro dans $[-0.2, -0.1]$. On aimerait l'approcher par une méthode de point fixe à partir de l'une des fonctions ϕ_1 ou ϕ_2 dans les graphiques suivants. Pour quelle(s) fonction(s) la méthode de point fixe converge-t-elle ? Justifiez votre réponse et, s'il y a convergence, donnez l'ordre de convergence.



Problème 3 : Systèmes linéaires (8 points)

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & \theta & 0 \\ \theta & 8 & \theta \\ 0 & \theta & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$

2p **3a** Écrivez la matrice d'itérations de la méthode de Jacobi appliquée à ce système et déterminez les conditions nécessaires et suffisantes sur θ afin que la méthode soit convergente.

2p **3b** Sans faire de calculs, répondez à la même question pour la méthode de Gauss-Seidel, en justifiant votre réponse.

4p **3c** On fixe $\theta = 1$ et on considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionnée :

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez que les matrices P et A sont symétriques définies positives et calculez la valeur optimale du paramètre α.

Problème 4 : Interpolation (8 points)

On veut approximer la fonction $f : \left[4, \frac{9}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\arctan(\pi x) + 2\pi x$ par un polynôme de degré 2 qui interpole la fonction aux points $4, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}$.

Pour rappel, la dérivée de $-\arctan(\pi x)$ est $\frac{-\pi}{1+\pi^2 x^2}$.

4p **4a** Calculez la base de Lagrange associée à ces points.

2p **4b** Calculez le polynôme d'interpolation de degré 2.

2p **4c** Quelle est l'erreur d'interpolation ?

Problème 5 : Approximation numérique (6 points)
Des chimistes supposent que la pression P, le volume V et la température T d'un gaz sont liés par la relation $PV = KT + C$, où K et C sont des constantes.
On a fait les mesures suivantes :

P	8	5	7
V	2	2	1
T	9	7	4

6p **5** Calculez une approximation de C et de K.

Problème 6 : Intégration numérique (8 points)

2p **6a** Donnez la définition d'une formule de quadrature en expliquant les notations.

2p **6b** Donnez la définition de degré d'exactitude d'une formule de quadrature.

4p **6c** Démontrez le théorème suivant en complétant l'énoncé.

Théorème (poids d'interpolation) Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.
J est exacte de degré $M-1$ $\iff$ $\omega_j =$ $j = 1, \ldots, M$

Problème 7 : Code en Python (4 points)

Complétez le code de la fonction qui implémente l'interpolation de Lagrange. Des points sont dédiés aux commentaires.

4p **7**

```
def LagrangeInterpolation(t,y,z):
  # the input variables are: ...
```

Le formulaire se trouve en dernière page

Si vous utilisez cette page pour terminer un exercice, il est nécessaire de préciser de quel exercice il s'agit et il est impératif d'avoir indiqué sur la page de l'exercice en question que vous continuez ici.
C'est important sinon les correcteurs ne tiendront pas compte de cette page.

Le formulaire se trouve en dernière page

Si vous utilisez cette page pour terminer un exercice, il est nécessaire de préciser de quel exercice il s'agit et il est impératif d'avoir indiqué sur la page de l'exercice en question que vous continuez ici.
C'est important sinon les correcteurs ne tiendront pas compte de cette page.

EDO

$$-\lambda_{max} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \leq -\lambda_{min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\ldots,p}|\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)} \ ,$$

$$\forall n = 0,\ldots,N_h \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \leq h t_n \frac{1}{2} \max_{t\in[t_0,t_n]} |y''(t)|$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\right]$$

$$... = \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n,u_n))\right]$$

Systèmes linéaires

$$B = P^{-1}(P-A) = I - P^{-1}A \quad , \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}$$

$$\begin{aligned} P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T\mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A\mathbf{z}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\mathbf{p}^{(k)^T}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)^T}A\mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)} \\ P\mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k+1)} \\ \beta_k &= \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1+c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \, , \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathrm{Cond}\,(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C^TC)}{\lambda_{\min}(C^TC)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\min}(C)}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x\in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x\in I} |\ E_1^H f(x)\ | \leq \frac{H^2}{8} \max_{x\in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x\in I} |\ E_n^H f(x)\ | \leq \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|\,.$$

Intégration numérique

$$J^{xx}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$J^{xx}(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$J^{xx}(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$|I(f) - I_{xx}^c(f)| \leq \frac{b-a}{180\cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)|$$

Équations non-linéaires

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^d} = \frac{1}{d!}\phi^{(d)}(\alpha)$$