

Problème 1 : Équations différentielles ordinaires (10.4 points)

- 2.4p 1a Voici quelques méthodes d'approximation d'équations différentielles ordinaires. Sous chaque colonne, écrivez respectivement si la méthode est implicite ou explicite, donnez l'ordre, et si elle conditionnellement stable, inconditionnellement stable, ou instable.

(Bonne réponse 0.2, mauvaise 0, pas de réponse 0).

Méthode	Explicite/Implicite	Ordre de convergence	Stabilité
Euler Progressive	EXPLICITE	1	CONDITIONNELLEMENT STABLE
Euler Retrograde	IMPLICITE	1	INCONDITIONNELLEMENT STABLE
Heun	EXPLICITE	2	CONDITIONNELLEMENT STABLE
Crank-Nicholson	IMPLICITE	2	INCONDITIONNELLEMENT STABLE

2p 1b

Schema de CN : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$

avec h : pas de temps, $h > 0$.

Pour ce problème, on a que $f(t, y) = 2\sqrt{y} \cdot \frac{1}{1+t^2}$; du coup le schema de CN s'écrit de la façon suivante:

$$\begin{cases} y_0 = 3 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(2\sqrt{y_n} \cdot \frac{1}{1+t_n^2} + 2\sqrt{y_{n+1}} \cdot \frac{1}{1+t_{n+1}^2} \right) \\ = y_n + h \left(\sqrt{y_n} \cdot \frac{1}{1+t_n^2} + \sqrt{y_{n+1}} \cdot \frac{1}{1+t_{n+1}^2} \right) \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Précisions: $t_n = 4 + nh \quad \forall n \geq 0$ et $y_n \approx y(t_n)$

2p 1c

La méthode d'Euler progressive est stable si $\exists \lambda_{\min}, \lambda_{\max} > 0$ tels que $-\lambda_{\max} \leq \frac{\partial f}{\partial y}(t, x) \leq -\lambda_{\min}$ et $h < 2/\lambda_{\max}$.

Dans ce cas, on a que $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$.

Comme $y(0) = 3$ et $F(t, y) > 0 \quad \forall t \geq 0, \forall y \geq 3$, on a que $y(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$. Par conséquent, $\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) > 0$ $\forall t \geq 0, \forall y \geq 3$ et donc $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} > 0$: $-\lambda_{\max} \leq \frac{\partial F}{\partial y} \leq -\lambda_{\min}$.

Finalement, ce n'est pas possible de donner une condition de stabilité sur h par la méthode d'Euler progressive.

2p 1d

À partir du 1b, on a que :

$$M_{n+1} = M_n + h \left(\sqrt{M_n} \frac{1}{1+t_n^2} + \sqrt{M_{n+1}} \frac{1}{1+t_{n+1}^2} \right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} & (M_{n+1} - h \sqrt{M_{n+1}} \frac{1}{1+t_{n+1}^2}) - (M_n - h \sqrt{M_n} \frac{1}{1+t_n^2}) = F(M_n) = 0 \\ & F(x) = (x - h \sqrt{x} \frac{1}{1+t_n^2}) - (M_n - h \sqrt{M_n} \frac{1}{1+t_n^2}). \end{aligned}$$

En appliquant la méthode de Newton, on a que :

$$[k \geq 0] \begin{cases} X^{(0)} = M_n \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{F(X^{(k)})}{F'(X^{(k)})} \end{cases} \text{ avec } \begin{aligned} F(X^{(k)}) &= \left(X^{(k)} - \sqrt{X^{(k)}} \frac{1}{1+t_n^2} \right) - \left(M_n - h \sqrt{M_n} \frac{1}{1+t_n^2} \right) \\ F'(X^{(k)}) &= \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{X^{(k)}}} \frac{1}{1+t_n^2} \right) \end{aligned}$$

2p 1e

Méthode 1 : courbe d'erreur proportionnelle à $h \Rightarrow$ ordre 1

Ex: Euler rétrograde ou progressive

Méthode 2 : courbe d'erreur proportionnelle à $h^2 \Rightarrow$ ordre 2

Ex: ~~Runge-Kutta~~ (Runge-Nicholson) ou Heun

Méthode 3 : courbe d'erreur proportionnelle à $h^3 \Rightarrow$ ordre 3

Ex: //

Problème 2 : Équations non linéaires (6 points)

- 2p 2a Pour chaque intervalle où il est possible d'utiliser la méthode de bisection, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaire pour trouver un zéro avec une erreur inférieure à 10^{-6} . Autrement, précisez par une croix dans la dernière colonne qu'elle n'est pas utilisable. (Bonne réponse 0.4 points, mauvaise ou pas de réponse 0 points.)

[a,b]	# itérations	pas utilisable
[-0.75, -0.65]		X
[-0.60, -0.50]		X
[-0.48, -0.38]	15, 16 ou 17	16
[-0.23, 0.33]		X
[0.02, 0.32]	18,	18

$$|e^{(n)}| = |x^{(n)} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$n \geq \lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) - 1 \rceil$$

or two more than above

2p 2b

D'après la théorie, la méthode de point fixe converge localement (i.e. en choisissant la donnée initiale $x^{(0)}$ suffisamment proche de α) si $|\Phi'(\alpha)| < 1$. Notez que, dans ce cas, Φ' existe bien $\forall x$ dans les deux cas, soit Φ_1 soit Φ_2 sont différentiables. Comme $\Phi_1'(\alpha) > 1$ et $\Phi_2'(\alpha) < 1$, la méthode ne converge que pour Φ_2 . De plus, $\Phi_2'(\alpha) = 0$, du coup l'ordre de convergence est (au moins) 2 (convergence quadratique).

2p 2c

Soit $f(x) = \tan\left(2\pi\left(x - \frac{1}{5}\right)\right) - \pi x + 1$, soit $x^{(0)} = 0.1$ le point initial. La méthode de Newton s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0.1 \\ (n \geq 0) \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \end{cases} \quad \text{avec}$$

$$f(x^{(n)}) = \tan\left(2\pi\left(x^{(n)} - \frac{1}{5}\right)\right) - \pi x^{(n)} + 1$$

$$f'(x^{(n)}) = \frac{2\pi}{\cos^2\left(2\pi\left(x^{(n)} - \frac{1}{5}\right)\right)} - \pi$$

Problème 3 : Approximation numérique (6 points)

6p 3

Selon le modèle de Levin, on a que

$$\begin{aligned} R &= cN(1-N) - eN = \\ &= cN - cN^2 - eN = \\ &= (c-e)N - cN^2 = a_0 + a_1 N + a_2 N^2 \end{aligned}$$

Étant donné K valeurs de N et de R , on cherche alors la meilleure approximation quadratique de R en fonction de N , au sens des moindres carrés.

Cela signifie qu'on cherche résoudre le problème suivant :

$$\underline{a} = \underset{\underline{a} \in \mathbb{R}^3}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^K (r_i - (\underline{a}_0 + \underline{a}_1 h_i + \underline{a}_2 h_i^2))^2$$

où $\{h_i, r_i\}_{i=1}^K$ ($K=8$), sont les données.

Au niveau algébrique, cela signifie résoudre le système linéaire suivant :

$$B^T B \underline{a} = B^T \underline{r}$$

où $B \in \mathbb{R}^{K \times 3}$ est la matrice de Vandermonde de degré 2 à partir de $\{h_i\}_{i=1}^K$ ($K=8$) :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & h_0 & h_0^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & h_K & h_K^2 \end{bmatrix}$$

$\underline{r} \in \mathbb{R}^K$ est le vecteur des données.

Avec les données : $m=2$, $B = \text{Vandermonde}(N, m)$,

$$\underline{a} = \text{hp. linéar. solve}(B, \det(B), B, \det(r))$$

on trouve : $\underline{a}_0 \approx -3.70 \cdot 10^{-1}$, $\underline{a}_1 \approx +0.199$, $\underline{a}_2 \approx -0.196$

Étant $c = -\underline{a}_2$ et $e = (-\underline{a}_1 = -\underline{a}_2 - \underline{a}_1 = -(\underline{a}_2 + \underline{a}_1))$, on a que
 $c \approx 0.196$ et $e \approx 0.296$.

Problème 4 : Systèmes linéaires (10 points)

2p

4a

Méthode de Jacobi $\Rightarrow B_J = I - P_J^{-1}A$ avec $P_J = D, = \text{diag}(A)$

Avec Python, on peut la calculer en utilisant les commandes

suivantes : $P_J = \text{np.diag}(A)$,
 $B_J = \text{np.linalg.solve}(P_J, (P_J - A))$;

Condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que $\rho(B_J) < 1$

où $\rho(B_J) = \max(|\lambda_i(B_J)|)$ est le rayon spectral de B_J .

Pour ce cas, à l'aide de la commande $\text{np.linalg.eig}(B_J)$,

on trouve que $\rho(B_J) \approx \underline{0.9967} < 1$; du coup la méthode de Jacobi converge.

2p

4b

Méthode de Gauss-Seidel $\Rightarrow B_{GS} = I - P_{GS}^{-1}A$ avec $P_{GS} = D + L$
 avec $D = \text{diag}(A)$ et $L = \text{tril}(A)$.

Avec Python:

$P_{GS} = \text{np.tril}(A, k=0)$;

$B_{GS} = \text{np.linalg.solve}(P_{GS}, (P_{GS} - A))$;

Pour ce cas, on a que $\rho(B_{GS}) \approx \underline{0.2152} < 1$; du coup la méthode de Gauss-Seidel converge aussi.

2p

4c

Pour la méthode de Richardson stationnaire préconditionnée, la valeur optimale de $\alpha \in \mathbb{R}$ est égale à $\alpha_{\text{opt}} = 2 / (\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$, étant $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} \in \mathbb{R}$ les valeurs propres plus petit et plus grand de $P^{-1}A$, respectivement. (Cela est vrai à condition que P soit inversible, A soit SDP et les valeurs propres de $P^{-1}A$ soient strictement positives; toutes ces conditions sont bien respectées dans ce cas!)

Dans ce cas: $P = (P+U)$ dot (nr. linéaire - solve $(P, P+U)$); ~~...~~

ou à que: $\lambda_{\min} = 0.893$ $\wedge$ $\lambda_{\max} = 1$ $\Rightarrow$ $\alpha_{\text{opt}} = 2 / (\lambda_{\min} + \lambda_{\max}) \approx 1.056$

4p

4d

Erreur pour Richardson stationnaire préconditionnée

$$\hookrightarrow \|x^{(k)} - x^*\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A \quad [k \geq 0]$$

ou $K(P^{-1}A)$ est le conditionnement de $P^{-1}A$ et $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$

Du coup: $\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \approx 1.21$

$$\left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A \leq \varepsilon \leadsto M^k e^{(0)} \leq \varepsilon$$

et donc: $K \geq \lceil \ln(\varepsilon / e^{(0)}) / \ln(M) \rceil$

Finalement: $\varepsilon = 10^{-6}$, $e^{(0)} \approx 2.5$, $M \approx 1.056$

(ce qui implique que:)

~~$$K \geq \lceil 6.96 \rceil = 7$$~~

$$K \geq \lceil 5.14 \rceil = 6$$

Problème 5 : Integration numérique (6 points)

2p 5a

$$I = \int_2^5 e^{+x^2} dx$$

Formule de Simpson : $I^s = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

où $a=2$ et $b=5$:

$$I^s = \frac{5-2}{6} \left(e^4 + 4e^{(3.5)^2} + e^{25} \right) = \frac{1}{2} \left(e^4 + 4e^{12.25} + e^{25} \right) \\ \approx 3.60 \cdot 10^{10}$$

2p

5b

(*) $f(x) = e^{x^2} \in \mathcal{C}^4([2,5])$, on peut utiliser l'estimation

d'erreur suivante: $|I - I_c^4| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(5)}(x)|$ où $H = \frac{b-a}{N}$.

On a ce (x):

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow f'(x) = 2x e^{x^2} \rightarrow f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$$

$$\hookrightarrow f^{(3)}(x) = 4x e^{x^2} + 8x e^{x^2} + 8x^3 e^{x^2}$$

$$\hookrightarrow f^{(4)}(x) = 4e^{x^2} + 8x^2 e^{x^2} + 8e^{x^2} + 16x^2 e^{x^2} + 24x^2 e^{x^2} + 16x^3 e^{x^2} \\ = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{x^2} = 4(3x^4 + 12x^2 + 3) e^{x^2}$$

(*) $f^{(4)}(x)$ est croissante sur $[2,5]$, on a que $\max_{x \in [2,5]} f^{(4)}(x) = f^{(4)}(5)$

$$\text{et } f^{(4)}(5) \approx 8 \cdot 10^{13}$$

$$\text{On a donc: } |I - I_c^4| \leq \frac{3}{180 \cdot 16} H^4 \cdot 8 \cdot 10^{13} = \frac{10^{13}}{12} H^4 = \frac{10^{13}}{12} \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{N^4} \\ = \frac{27}{4} 10^{13} \cdot \frac{1}{N^4}$$

2p

5c

$$\text{On a que } |I - I_c^4| \leq \frac{10^{13}}{12} H^4 \leq \varepsilon = 10^{-5}$$

On a donc:

$$H \leq \left(\frac{12 \cdot 10^{-5}}{10^{13}} \right)^{1/4} = \left(\frac{12}{10^{18}} \right)^{1/4} \approx \frac{1.05 \cdot 10^{-4}}{6.69} = 1.57 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Comme } H = \frac{b-a}{N} = \frac{3}{N} \\ \hookrightarrow H \leq \frac{1.05 \cdot 10^{-4}}{6.69 \cdot 10^{-5}}$$

$$N \geq \left\lceil \frac{3}{\frac{1.05 \cdot 10^{-4}}{6.69 \cdot 10^{-5}}} \right\rceil = \left\lceil \frac{28571.43}{1.57} \right\rceil = 18198$$

Donc, il faut que $N \geq 18198$ afin que l'erreur soit plus petite que $\varepsilon = 10^{-5}$.

1) Exprimer l'erreur d'interpolation polynomiale, ainsi que les conditions pour sa validité.

2) Donner la définition d'interpolation par morceaux d'une fonction

3) Démontrer le théorème suivant:

Théorème (Interpolation linéaire par morceaux) Soit $[a, b]$ un intervalle. Il existe une constante C , telle que $\forall f \in C^2([a, b])$, $\forall H > 0$

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - \Pi_n^H f(t)| \leq \frac{H^2}{4} \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$$

1) $[a, b]$, $f \in C^{n+1}([a, b])$

$$E_n(f) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - \Pi_n f(t)| \leq \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

ou 4

2) Soit $N_H \in \mathbb{N}$, $H = \frac{b-a}{N_H}$ et $x_k = a + kH$, $k = 0, \dots, N_H$.

Soit $\Pi_n^k f$ le polynôme d'interpolation de degré n sur un interval $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N_H - 1$

L'interpolation par morceaux est définie par la fonction $\Pi_n^H f(t) = \Pi_n^k f(t)$ si $t \in I_k$

3) Proof:

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - \pi_n^H f(t)| = \max_{k=0, n-1} \left\{ \max_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |f(t) - \pi_n^H f(t)| \right\}$$

$$\stackrel{(d_2)}{=} \max_k \left\{ \max_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |f(t) - \pi_n^k f(t)| \right\}$$

$$\stackrel{(d_2)}{\leq} \max_k \left\{ \frac{1}{2(1+n)} \left(\frac{\overbrace{x_{k+1} - x_k}^{=H}}{1} \right)^{1+n} \max_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |f''(t)| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{4} H^2 \max_k \max_t |f''(t)| = \frac{H^2}{4} \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$$