

# ANALYSE NUMÉRIQUE SV

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021



# SYSTÈME D'EDO





## EXEMPLE

Le système linéaire

$$\begin{cases} y_1'(t) &= -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) - 4y_2(t) \end{cases} \quad (16)$$

avec les conditions initiales  $y_1(0) = y_{10}$ ,  $y_2(0) = y_{20}$ , s'écrit sous la forme (??), où

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

Soit  $h > 0$  le pas de temps. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $t_n = nh$ ,  $b_n = b(t_n)$  et on désigne par  $u_n$  une valeur approchée de la solution exacte  $y(t_n)$  au temps  $t_n$ .

Les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution  $y(t)$  de (16) s'écrivent respectivement :

$$\text{Euler progressif} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hAu_n + hb_n = (I + hA)u_n + hb_n \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Euler rétrograde} \quad \begin{cases} (I - hA)u_{n+1} = u_n + hb_{n+1} \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Crank-Nicolson} \quad \begin{cases} (I - \frac{h}{2}A)u_{n+1} = (I + \frac{h}{2}A)u_n + \frac{h}{2}(b_n + b_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

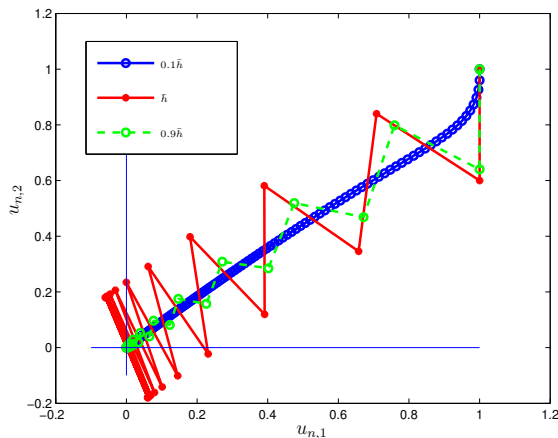
$$n = 0, 1, \dots, N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes de ER et CN, il faut résoudre un système linéaire avec pour matrice  $I - hA$  et  $I - \frac{h}{2}A$  respectivement (il s'agit de méthodes implicites).

La méthode d'Euler progressive est explicite (il n'y a pas de système linéaire à résoudre), par contre elle est seulement conditionnellement stable. Dans notre cas, les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -5$ ; elles sont bien négatives, donc la condition (??) sur  $h$  s'applique : comme  $\rho(A) = 5$ , cette condition de stabilité est

$$h < \bar{h} = \frac{2}{5}.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (16) avec condition initiale  $y_0 = [1, 1]^T$  et différentes valeurs du pas de temps  $h$ .





On peut aussi considérer le cas d'un système non linéaire de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & t \in (t_0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

(par exemple le système (1)). Si  $\frac{\partial F}{\partial y}$  est une matrice à valeurs propres réelles et négatives alors la méthode d'**Euler rétrograde** est inconditionnellement stable.

Si, pour tout  $t$  in  $[t_0, T]$ , tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , il vaut que

$$-\lambda_{\max} \leq \lambda < \lambda_{\min} < 0 \text{ pour toutes les valeurs propres } \lambda \text{ de } \frac{\partial F(t, y)}{\partial y}$$

alors le schéma d'**Euler progressif** est stable sous la condition

$$h < \frac{2}{\lambda_{\max}},$$

## EXEMPLE

Le système non-linéaire

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t} \sin(t), \\ y_2'(t) &= \cos(y_1(t)) - 4y_2(t), \end{aligned} \quad (17)$$

avec les conditions initiales  $y_1(0) = y_{10}$ ,  $y_2(0) = y_{20}$ , s'écrit sous la forme

$$y'(t) = F(t, y(t)),$$

où

$$F(t, y(t)) = \begin{bmatrix} -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t} \sin(t) \\ \cos(y_1(t)) - 4y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Soit  $h > 0$  le pas de temps. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $t_n = nh$  et on désigne par  $u_n$  une valeur approchée de la solution exacte  $y(t_n)$  au temps  $t_n$ .

Les schémas d'Euler progressif, rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution  $y(t)$  de (17) s'écrivent respectivement :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Euler progressif} & \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0, \end{cases} \\
 \text{Euler rétrograde} & \begin{cases} u_{n+1} + hF(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n, \\ u_0 = y_0, \end{cases} \\
 \text{Crank-Nicolson} & \begin{cases} u_{n+1} - \frac{h}{2}F(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n + \frac{h}{2}F(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0. \end{cases}
 \end{array}$$

$$n = 0, 1, \dots, N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes d'Euler rétrograde et Crank-Nicolson, il faut résoudre un système non-linéaire.

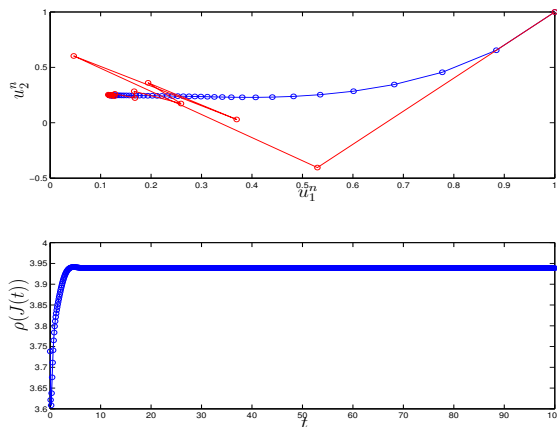
La méthode d'Euler progressive est explicite (pas de système à résoudre) mais, par contre, elle est seulement conditionnellement stable. Dans notre cas, le jacobien de  $F$  est donné par

$$J = \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} -2 & \cos y_2 \\ -\sin y_1 & -4 \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - \sin y_1 \cos y_2}$ ; elles sont bien négatives, en particulier  $-3 - \sqrt{2} < \lambda_{1,2} < -3 + \sqrt{2} < 0$ , et  $\rho(J) < 3 + \sqrt{2}$ . La condition de stabilité est ainsi :

$$h < \bar{h} = \frac{2}{\rho(J)}, \quad \text{satisfaite par exemple si } h < \frac{2}{3 + \sqrt{2}} \simeq 0.453.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (17) avec condition initiale  $y_0 = [1, 1]^T$  :  $h = 0.1$  (bleu) et  $h = 0.8\bar{h}$  (rouge). Si on prend  $h \geq \bar{h}$ , on peut observer l'instabilité de la méthode.



Voici un résumé concernant la stabilité :

Problème		Stabilité des méthodes explicites
Modèle	$y' = \lambda y$	$h < 2/ \lambda $
Cauchy	$y' = f(t, y(t))$	$h < 2 / \max \left  \frac{\partial f}{\partial y} \right $
Systèmes Eq. Linéaires	$y' = Ay + b$	$h < 2/\rho(A)$
Systèmes Eq. Non-Linéaires	$y' = F(t, y(t))$	$h < 2/\rho(J)$

avec

- $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ , pour un système d'équations linéaires ;
- $\rho(J) = \max_i |\lambda_i(J)|$ , pour un système d'équations non-linéaires, où  
 $J(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$ , avec  $\lambda_i(J) < 0, \forall i$ .

