

ANALYSE NUMÉRIQUE SV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021



SYSTÈME D'EDO

D'abord considérons le cas "simple" de système d'EDO

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

où $\vec{y}: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $b: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^p$, $A_{p \times p}$

$$\vec{y}'(t_n) = \frac{\vec{y}(t_{n+1}) - \vec{y}(t_n)}{h}$$

$$\boxed{\text{Soit } h > 0, \quad t_n = t_0 + hn, \quad n=0, 1, \dots, N_h, \quad N_h = \frac{T-t_0}{h}}$$

\vec{u}_n approche $\vec{y}(t_n)$, $n=0, \dots, N_h$.

La méthode d'EP s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{h} = A\vec{u}_n + b(t_n) \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + hA\vec{u}_n + hb(t_n) \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \end{cases} \quad n=0, \dots, N_h$$

EP s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{h} = A\vec{u}_{n+1} + b(t_{n+1}) \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{u}_{n+1} - hA\vec{u}_{n+1}) = \vec{u}_n + hb(t_{n+1}) \\ (I - hA)\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + hb(t_{n+1}) \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Si les valeurs propres de A sont toutes négatives,
alors le problème physique est stable. Dans ce cas
Euler rétrograde est inconditionnellement stable (au sens des perturbations).

Pour Euler Progressive, il faut calculer les valeurs propres de A .



Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p < 0$, et on pose $\lambda_{\max} = \max_{k=1, \dots, p} |\lambda_k|$
(donc $-\lambda_{\max} \leq \lambda_1, \dots, \lambda_p < 0$)

Alors EP est stable sous la condition que $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad t \in (0, \infty)$$

EXEMPLE

Le système linéaire

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) = 3y_1(t) - 4y_2(t) \end{cases} \quad t \in (0, \infty) \quad (16)$$

$y_1(0) = y_{10}$

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, s'écrit sous la forme (16), où

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

Soit $h > 0$ le pas de temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = nh$, $b_n = b(t_n)$ et on désigne par u_n une valeur approchée de la solution exacte $y(t_n)$ au temps t_n .

Les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution $y(t)$ de (16) s'écrivent respectivement :

$$\text{Euler progressif} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hAu_n + hb_n = (I + hA)u_n + hb_n \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Euler rétrograde} \quad \begin{cases} (I - hA)u_{n+1} = u_n + hb_{n+1} \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Crank-Nicolson} \quad \begin{cases} (I - \frac{h}{2}A)u_{n+1} = (I + \frac{h}{2}A)u_n + \frac{h}{2}(b_n + b_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \dots, (N_h - 1)$$

Exercice : partir de GK et arriver à

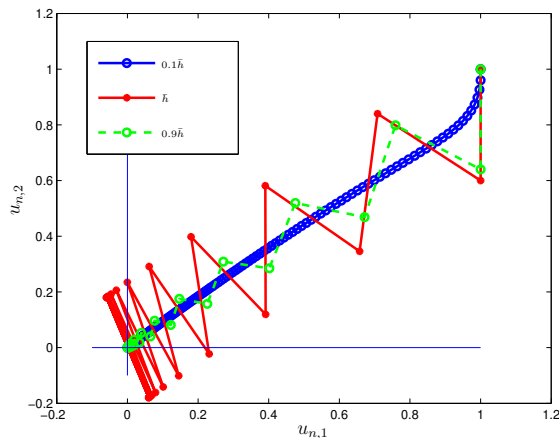
Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes de ER et CN, il faut résoudre un système linéaire avec pour matrice $I - hA$ et $I - \frac{h}{2}A$ respectivement (il s'agit de méthodes implicites).

$$\lambda_{\max} = \max_{\lambda} |\lambda| = \max \{ |-1|, |-5| \} = 5$$

La méthode d'Euler progressive est explicite (il n'y a pas de système linéaire à résoudre), par contre elle est seulement conditionnellement stable. Dans notre cas, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -5$; elles sont bien négatives, donc la condition (??) sur h s'applique : comme $\rho(A) = 5$, cette condition de stabilité est

$$h < \bar{h} = \frac{2}{5} = \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (16) avec condition initiale $y_0 = [1, 1]^T$ et différentes valeurs du pas de temps h .



On peut aussi considérer le cas d'un système non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = F(t, \vec{y}(t)) & t \in (t_0, T), \\ \vec{y}(0) = y_0, \end{cases}$$

$\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^p$
 $F: (t_0, T) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $(t, \vec{x}) \mapsto F(t, \vec{x})$

(par exemple le système (1)). Si $\boxed{\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}}$ est une matrice à valeurs propres réelles et négatives alors la méthode d'**Euler rétrograde** est inconditionnellement stable.

Si, pour tout t in $[t_0, T]$, tout $y \in \mathbb{R}^n$, il vaut que

$$-\lambda_{\max} \leq \lambda \leq -\lambda_{\min} < 0 \text{ pour toutes les valeurs propres } \lambda \text{ de } \frac{\partial F(t, y)}{\partial y}$$

avec $\lambda_{\max} > 0, \lambda_{\min} > 0$

$\forall t \in (t_0, T)$
 $\forall y \in D_y$

alors le schéma d'**Euler progressif** est stable sous la condition

$$h < \frac{2}{\lambda_{\max}},$$

EXEMPLE

Le système non-linéaire

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = F(t, \vec{y}(t)) & t \in (0, \infty) \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t} \sin(t), \\ y_2'(t) &= \cos(y_1(t)) - 4y_2(t), \end{aligned} \quad (17)$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, s'écrit sous la forme

$$y'(t) = F(t, y(t)),$$

où

$$F(t, y) = \begin{bmatrix} -2y_1 + \sin(y_2) + e^{-t} \sin(t) \\ \cos(y_1) - 4y_2 \end{bmatrix}.$$

Soit $h > 0$ le pas de temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = nh$ et on désigne par u_n une valeur approchée de la solution exacte $y(t_n)$ au temps t_n .

Les schémas d'Euler progressif, rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution $y(t)$ de (17) s'écrivent respectivement :

$$\text{Euler progressif} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

$$\text{Euler rétrograde} \quad \begin{cases} u_{n+1} - hF(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n, \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

$$\text{Crank-Nicolson} \quad \begin{cases} u_{n+1} - \frac{h}{2}F(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n + \frac{h}{2}F(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \dots, N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes d'Euler rétrograde et Crank-Nicolson, il faut résoudre un système non-linéaire.

La méthode d'Euler progressive est explicite (pas de système à résoudre) mais, par contre, elle est seulement conditionnellement stable. Dans notre cas, le jacobien de F est donné par

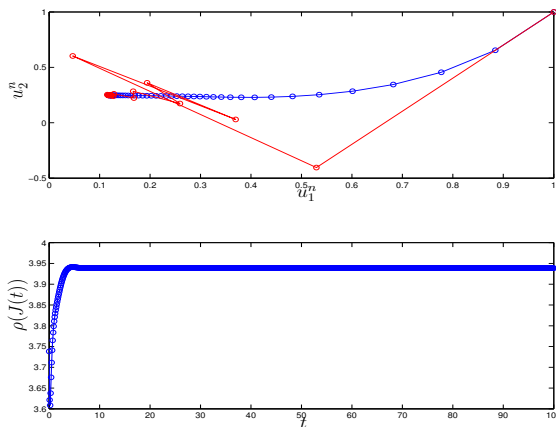
$$J = \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} -2 & \cos y_2 \\ -\sin y_1 & -4 \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - \sin y_1 \cos y_2}$; elles sont bien négatives, en particulier $-3 - \sqrt{2} < \lambda_{1,2} < -3 + \sqrt{2} < 0$, et $\rho(J) < 3 + \sqrt{2}$. La condition de stabilité est ainsi :

$$\lambda_{\min} = -3 - \sqrt{2}, \quad \lambda_{\max} = -3 + \sqrt{2}$$

$$h < \bar{h} = \frac{2}{\rho(J)}, \quad \text{satisfaite par exemple si } h < \frac{2}{3 + \sqrt{2}} \approx 0.453.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (17) avec condition initiale $y_0 = [1, 1]^T$: $h = 0.1$ (bleu) et $h = 0.8\bar{h}$ (rouge). Si on prend $h \geq \bar{h}$, on peut observer l'instabilité de la méthode.



Voici un résumé concernant la stabilité :

$$[-\lambda_{\max}, -\lambda_{\min}]$$

avec $\lambda_{\max} > 0, \lambda_{\min} > 0$

Problème		Stabilité des méthodes explicites
Modèle	$y' = \lambda y$	$h < 2/ \lambda $
Cauchy	$y' = f(t, y(t))$	$h < 2 / \max \left \frac{\partial f}{\partial y} \right $
Systèmes Eq. Linéaires	$y' = Ay + b$	$h < 2/\rho(A)$
Systèmes Eq. Non-Linéaires	$y' = F(t, y(t))$	$h < 2/\rho(J)$

avec

Pour autant qu'il existe aussi λ_{\min} tel que...

- $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$, pour un système d'équations linéaires ;
- $\rho(J) = \max_i |\lambda_i(J)|$, pour un système d'équations non-linéaires, où

$$J(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}, \text{ avec } \lambda_i(J) < 0, \forall i.$$

