# Programme

Ce matin au programme :

- exercice systèmes ODE
- précisions sur l'examen
- organisation date de Q&A

Dans le tableau suivant, on résume les caractéristiques des méthodes qu'on a introduites :

| *Méthode* | *Explicite/Implicite* | *Stabilité* | *P.r. à* $h$ |
|---|---|---|---|
| Euler Progressive | Explicite | Conditionnellement | 1 |
| Euler Rétrograde | Implicite | Inconditionnellement | 1 |
| Crank–Nicolson | Implicite | Inconditionnellement | 2 |
| Heun | Explicite | Conditionnellement | 2 |
| Euler Modifiée | Explicite | Conditionnellement | 2 |
| Runge–Kutta | Explicite | Conditionnellement | 4 |

# Système d'EDO

## Exemple

Le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) & = & 3y_1(t) - 4y_2(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, s'écrit sous la forme (??), où

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

Soit $h > 0$ le pas de temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = nh$, $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}(t_n)$ et on désigne par $\mathbf{u}_n$ une valeur approchée de la solution exacte $\mathbf{y}(t_n)$ au temps $t_n$.

Les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution $\mathbf{y}(t)$ de (1) s'écrivent respectivement :

Euler progressif
$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + hA\mathbf{u}_n + h\mathbf{b}_n = (I + hA)\mathbf{u}_n + h\mathbf{b}_n \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Euler rétrograde
$$\begin{cases} (I - hA)\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{b}_{n+1} \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Crank-Nicolson
$$\begin{cases} (I - \frac{h}{2}A)\mathbf{u}_{n+1} = (I + \frac{h}{2}A)\mathbf{u}_n + \frac{h}{2}\left(\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}\right) \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

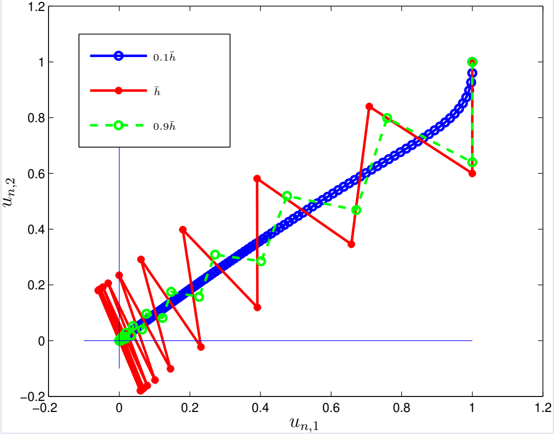
$$n = 0, 1, ..., N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes de ER et CN, il faut résoudre un système linéaire avec pour matrice $I - hA$ et $I - \frac{h}{2}A$ respectivement (il s'agit de méthodes implicites).

La méthode d'Euler progressive est explicite (il n'y a pas de système linéaire à résoudre), par contre elle est seulement conditionellement stable. Dans notre cas, les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -5$ ; elles sont bien négatives, donc la condition (**??**) sur $h$ s'applique : comme $\rho(A) = 5$, cette condition de stabilité est

$$h < \bar{h} = \frac{2}{5}.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (1) avec condition initiale $\mathbf{y}_0 = [1, 1]^\top$ et différentes valeurs du pas de temps $h$.



On peut aussi considérer le cas d'un système non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) & t \in (t_0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

(par exemple le système (??)). Si $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$ est une matrice à valeurs propres réelles et négatives alors la méthode d'**Euler rétrograde** est inconditionnellement stable.

Si, pour tout $t$ in $[t_0, T]$, tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, il vaut que

$$-\lambda_{\max} \leq \lambda < \lambda_{\min} < 0 \text{ pour toutes les valeurs propres } \lambda \text{ de } \frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$$

alors le schéma d'**Euler progressif** est stable sous la condition

$$h < \frac{2}{\lambda_{\max}},$$

## Exemple

Le système non-linéaire

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t}\sin(t), \\ y_2'(t) &= \cos(y_1(t)) - 4y_2(t), \end{aligned} \tag{2}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, s'écrit sous la forme

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)),$$

où

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t}\sin(t) \\ \cos(y_1(t)) - 4y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Soit $h > 0$ le pas de temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = nh$ et on désigne par $\mathbf{u}_n$ une valeur approchée de la solution exacte $\mathbf{y}(t_n)$ au temps $t_n$.

Les schémas d'Euler progressif, rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution $\mathbf{y}(t)$ de (2) s'écrivent respectivement :

Euler progressif
$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n), \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

Euler rétrograde
$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} + h\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{u}_n, \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

Crank-Nicolson
$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} - \frac{h}{2}\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{u}_n + \frac{h}{2}\mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n), \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

$$n = 0, 1, ..., N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes d'Euler rétrograde et Crank-Nicolson, il faut résoudre un système non-linéaire.

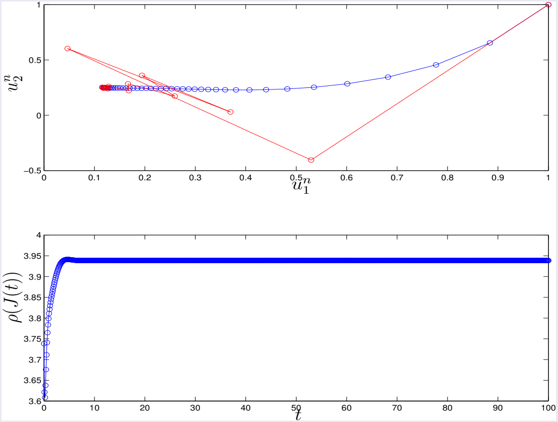
La méthode d'Euler progressive est explicite (pas de système à résoudre) mais, par contre, elle est seulement conditionellement stable. Dans notre cas, le jacobien de $\mathbf{F}$ est donné par

$$J = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -2 & \cos y_2 \\ -\sin y_1 & -4, \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - \sin y_1 \cos y_2}$; elles sont bien négatives, en particulier $-3 - \sqrt{2} < \lambda_{1,2} < -3 + \sqrt{2} < 0$, et $\rho(J) < 3 + \sqrt{2}$. La condition de stabilité est ainsi :

$$h < \bar{h} = \frac{2}{\rho(J)}, \quad \text{satisfaite par exemple si} \quad h < \frac{2}{3+\sqrt{2}} \simeq 0.453.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (2) avec condition initiale $\mathbf{y}_0 = [1,1]^\top$ : $h = 0.1$ (bleu) et $h = 0.8\bar{h}$ (rouge). Si on prend $h \geq \bar{h}$, on peut observer l'instabilité de la méthode.



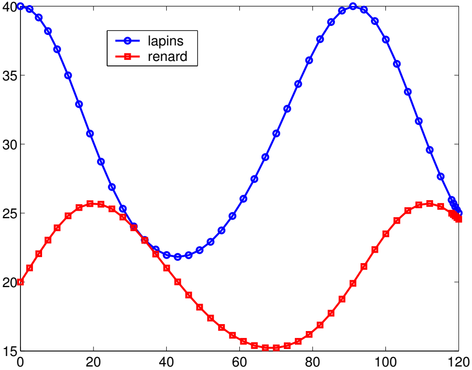
Voici un resumé concernant la stabilité :

| Problème | | Stabilité des méthodes explicites |
|---|---|---|
| Modèle | $y' = \lambda y$ | $h < 2/\lvert\lambda\rvert$ |
| Cauchy | $y' = f(t, y(t))$ | $h < 2/\max \left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial y} \right\rvert$ |
| Systèmes Eq. Linéaires | $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ | $h < 2/\rho(\mathbf{A})$ |
| Systèmes Eq. Non-Linéaires | $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$ | $h < 2/\rho(\mathbf{J})$ |

avec

- $\rho(\mathbf{A}) = \max_i \lvert\lambda_i(\mathbf{A})\rvert$, pour un système d'équations linéaires ;
- $\rho(\mathbf{J}) = \max_i \lvert\lambda_i(\mathbf{J})\rvert$, pour un système d'équations non-linéaires, où $\mathbf{J}(t, \mathbf{y}) = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$, avec $\lambda_i(\mathbf{J}) < 0$, $\forall i$.

On revient à l'exemple proposé au début du chapitre.



## Exemple

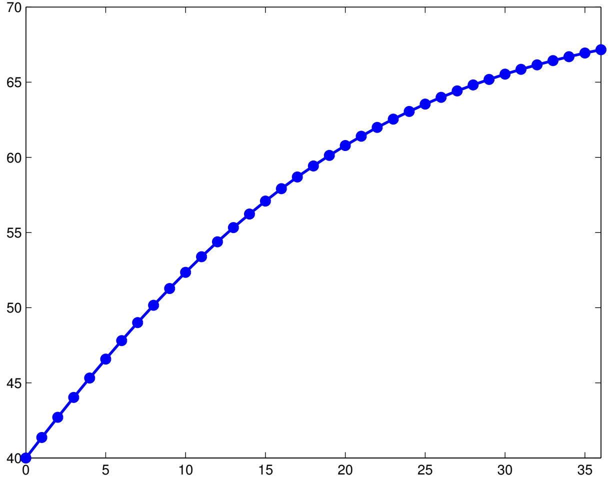
**?? (suite)** On considère d'abord l'équation scalaire (??), qu'on rappelle ici :

$$y'(t) = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right), \; t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

Prenons une population initiale de $40$ lapins dont le facteur de croissance est $C = 0.08$ (l'unité de temps est 1 mois) et la population maximale de $B = 70$ lapins. On résout l'équation par la méthode de Heun avec $h = 1$ mois sur une période de trois ans :

```
>> f=@(t,y) 0.08*y.*(1-(y/70));
>> tspan = [0 36]; y0=40; h = 1; Nh = 36/h;
>> [t, y] = heun(f,tspan,y0,Nh); plot(t,y)
```

## Évolution de la population de lapins sur 36 mois.



On considère, maintenant, le système (??). Prenons une population initiale $y_1(0)$ de 40 lapins, une population $y_2(0)$ de 20 renards et le système de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} y_1'(t) = 0.08\, y_1(t) - 0.004\, y_1(t)y_2(t), \\ y_2'(t) = -0.06\, y_2(t) + 0.002\, y_1(t)y_2(t). \end{cases} \tag{3}$$

On souhaite étudier l'évolution des deux populations sur une période de 10 ans. Si on introduit les vecteurs

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(t,\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.08\, x_1 - 0.004\, x_1x_2 \\ -0.06\, x_2 + 0.002\, x_1x_2 \end{bmatrix},$$

on peut écrire le système (3) sous la forme générale :

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t,\mathbf{y}), \ \ t > 0, \qquad \mathbf{y}(0) = [y_1(0), y_2(0)]^T. \tag{4}$$

Toutes les méthodes que nous avons vues jusqu'à maintenant sont applicables au système (4). Par exemple, la méthode d'Euler progressive s'écrit

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0 \qquad \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{h} = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

ce qui équivaut au schéma

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1,1} - u_{n,1}}{h} = 0.08\, u_{n,1} - 0.004\, u_{n,1} u_{n,2}, \\ \dfrac{u_{n+1,2} - u_{n,2}}{h} = -0.06\, u_{n,2} + 0.002\, u_{n,1} u_{n,2}, \quad n = 0, 1, \ldots \\ u_{0,1} = y_1(0), \quad u_{0,2} = y_2(0). \end{cases}$$

La commande `heun` permet de résoudre aussi des systèmes d'équations différentielles. Il faut d'abord écrire une fonction qui définisse le système :

```
>> fun2 = @(t,y) [ 0.08*y(1) - 0.004*y(1)*y(2);
                  -0.06*y(2) + 0.002*y(1)*y(2) ]
```

Ensuite, on peut résoudre le système :

```
>> y0=[40 20]; tspan=[0 120]; Nh=40;
>> [t,y] = heun(fun2, tspan, y0, Nh);
>> plot(t,y(:,1),'b', t,y(:,2),'r')
```

La première colonne de `y` contient la solution $y_1$ tandis que la deuxième colonne contient $y_2$. La figure suivante montre l'évolution des deux populations.

## Evolution des populations de lapins et de renards sur 10 ans.