

# ANALYSE NUMÉRIQUE SV

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021



# CONVERGENCE

# CONVERGENCE D'EULER PROGRESSIF



# DÉMONSTRATION I

On définit l'*erreur de troncature locale* de la méthode d'Euler progressive comme

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n), \quad (14)$$

et l'*erreur de troncature globale*

$$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|.$$

On sait (*voir différences finies*) que

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)|h.$$

Donc, on a l'estimation suivante pour l'erreur de troncature globale :

$$\tau(h) \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |y''(t)|h.$$

# DÉMONSTRATION I

On définit l'*erreur de troncature locale* de la méthode d'Euler progressive comme

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n), \quad (14)$$

et l'*erreur de troncature globale*

$$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|.$$

On sait (*voir différences finies*) que

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)|h.$$

Donc, on a l'estimation suivante pour l'erreur de troncature globale :

$$\tau(h) \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |y''(t)|h.$$

# DÉMONSTRATION II

On a les équations suivantes pour  $y(t)$  et  $u_n$ .

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) & n = 0, 1, 2, \dots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

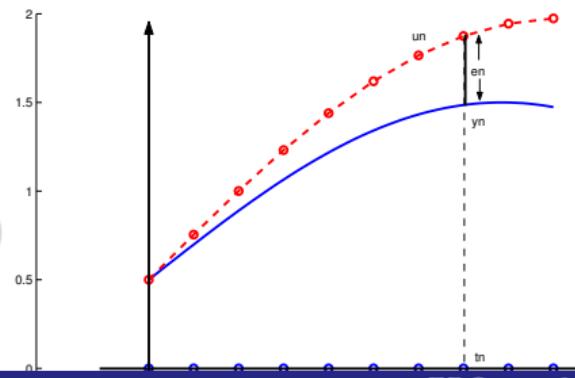
et de l'équation (14) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour  $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \frac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h) \\ e_0 = 0. \end{cases}$$

(15)



# DÉMONSTRATION II

On a les équations suivantes pour  $y(t)$  et  $u_n$ .

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) & n = 0, 1, 2, \dots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

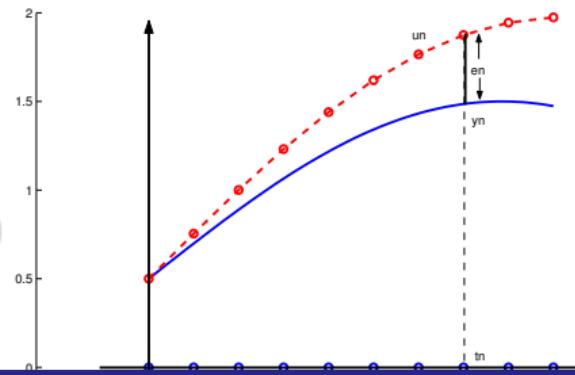
et de l'équation (14) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour  $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \frac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h) \\ e_0 = 0. \end{cases}$$

(15)



# DÉMONSTRATION II

On a les équations suivantes pour  $y(t)$  et  $u_n$ .

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) & n = 0, 1, 2, \dots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

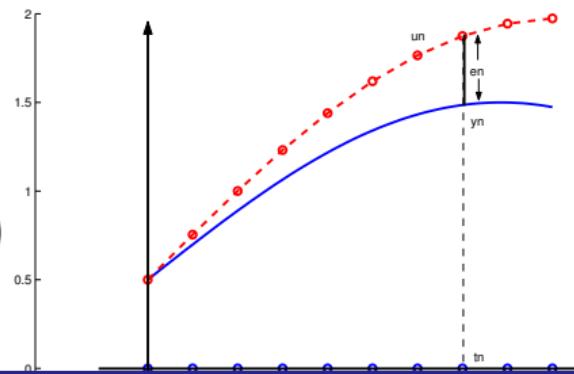
et de l'équation (14) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour  $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \frac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h) \\ e_0 = 0. \end{cases}$$

(15)



# DÉMONSTRATION III

D'après le théorème de Lagrange, il existe  $\xi_n$  tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} (u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe  $\eta_n$  tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h \frac{h}{2} y''(\eta_n).$$

Si  $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ , on a  $1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$  et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme  $e_0 = 0$ , on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.



# DÉMONSTRATION III

D'après le théorème de Lagrange, il existe  $\xi_n$  tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} (u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe  $\eta_n$  tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h \frac{h}{2} y''(\eta_n).$$

Si  $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ , on a  $1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$  et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme  $e_0 = 0$ , on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.



# DÉMONSTRATION III

D'après le théorème de Lagrange, il existe  $\xi_n$  tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} (u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe  $\eta_n$  tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h \frac{h}{2} y''(\eta_n).$$

Si  $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ , on a  $1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$  et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme  $e_0 = 0$ , on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.



# DÉMONSTRATION III

D'après le théorème de Lagrange, il existe  $\xi_n$  tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} (u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe  $\eta_n$  tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h \frac{h}{2} y''(\eta_n).$$

Si  $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ , on a  $1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$  et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme  $e_0 = 0$ , on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.



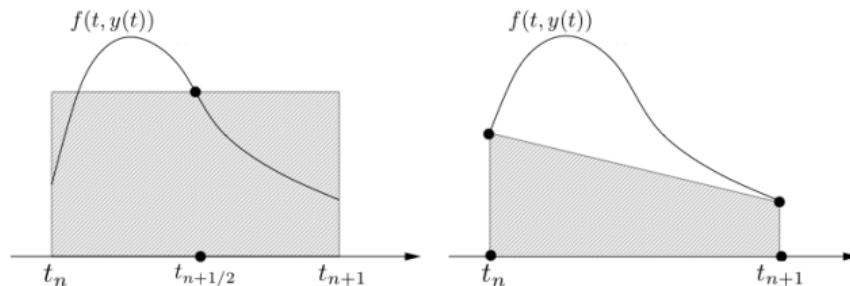
# MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Si on intègre l'équation  $y'(t) = f(t, y(t))$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (16)$$

## REMARQUE

### *Méthodes d'intégration numérique*



En utilisant la formule du trapèze, on trouve le schéma implicite suivant, appelé **schéma de Crank-Nicolson ou du trapèze** :

$$u_0 = y(t_0), \quad u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})], \quad n = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Ce schéma, qui est implicite, est inconditionnellement stable lorsqu'il est appliqué au problème modèle (3).

En modifiant le schéma (17) afin de le rendre explicite, on identifie **la méthode de Heun** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))]. \quad (18)$$

Ces deux méthodes sont d'ordre 2 par rapport à  $h$ .

Si on utilise dans (16) la méthode du point milieu, on trouve

$$u_{n+1} - u_n = h f(t_{n+\frac{1}{2}}, u_{n+\frac{1}{2}}).$$

Si maintenant, on approche  $u_{n+1/2}$  par

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n),$$

on trouve **la méthode d'Euler modifiée** :

$$u_0 = y(t_0), \quad u_{n+1} - u_n = h f \left( t_{n+\frac{1}{2}}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n) \right) \quad n = 0, 1, \dots$$

Les méthodes de Heun et d'Euler modifiée sont des cas particuliers de la famille des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2. Lorsqu'elles sont appliquées au problème modèle (3), on a dans les deux cas la condition de stabilité  $h < 2/|\lambda|$ .

Il existe d'autres méthodes plus compliquées, comme par exemple **la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** suivante, qui est obtenue en considérant la méthode d'intégration de Simpson :

$$u_n \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ \text{avec :} \\ K_1 = f(t_n, u_n), \\ K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_2\right), \\ K_4 = f(t_{n+1}, u_n + hK_3). \end{array} \right.$$

Dans le tableau suivant, on résume les caractéristiques des méthodes qu'on a introduites :

<i>Méthode</i>	<i>Explicite/Implicite</i>	<i>Stabilité</i>	<i>P.r. à h</i>
Euler Progressive	Explicite	Conditionnellement	1
Euler Rétrograde	Implicite	Inconditionnellement	1
Crank–Nicolson	Implicite	Inconditionnellement	2
Heun	Explicite	Conditionnellement	2
Euler Modifiée	Explicite	Conditionnellement	2
Runge–Kutta	Explicite	Conditionnellement	4

