Analyse Numérique SV

Équations différentielles ordinaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

EPFL

Convergence

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

u_n approx de $y(t_n)$

avec $n = 0, 1, \ldots, N_h$, $t_n = t_0 + nh$

Définition Une méthode numérique est dite convergente si

$$\forall n = 0, \ldots, N_h \qquad |u_n - y(t_n)| \leq C(h) \quad \text{où} \quad C(h) \to 0 \text{ pour } h \to 0$$

Si de plus $C(h) = K h^p$, $p > 0$ et K indépendant de h et n,

alors on dit que la méthode converge $\boxed{\text{à l'ordre } p}$.

Convergence d'Euler progressif

Théorème Si $y \in C^2([t_0,T])$ et si f satisfait

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \in [-\lambda_{max}, -\lambda_{min}] \text{ pour } \lambda_{max} > 0, \lambda_{min} > 0 \quad \forall t \in [t_0,T] \; \forall x \in D_y$$

alors la méthode d'E Progressive est convergente à l'ordre 1

En particulier $\forall n > 0$ $|y(t_n) - u_n| \leq c(t_n) h$

$$c(t_n) = t_n \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0,t_n]} |y''(t)| \leq K = T \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0,T]} |y''(t)|$$

Ici $T < \infty$

Rem : Le même résultat est valable pour ER.

Démonstration I

On définit l'*erreur de troncature locale* de la méthode d'Euler progressive comme

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n), \qquad \left[\frac{u_{n+1} - u_n}{h}\right] \tag{14}$$

et l'*erreur de troncature globale*

$$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|.$$

On sait (*voir différences finies*) que

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)| h.$$

Donc, on a l'estimation suivante pour l'erreur de troncature globale :

$$\tau(h) \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |y''(t)| h.$$

Démonstration I

On définit l'*erreur de troncature locale* de la méthode d'Euler progressive comme

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n), \tag{14}$$

et l'*erreur de troncature globale*

$$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|.$$

On sait (*voir différences finies*) que

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)| h.$$

Donc, on a l'estimation suivante pour l'erreur de troncature globale :

$$\boxed{\tau(h) \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0,T]} |y''(t)| h.}$$

Démonstration II

On a les équations suivantes pour $y(t)$ et u_n.

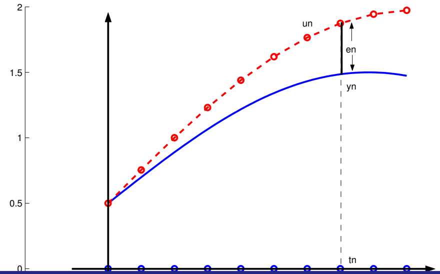
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in I \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2 \ldots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

et de l'équation (14) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \dfrac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h) \\ e_0 = 0. \end{cases} \tag{15}$$



Démonstration II

On a les équations suivantes pour $y(t)$ et u_n.

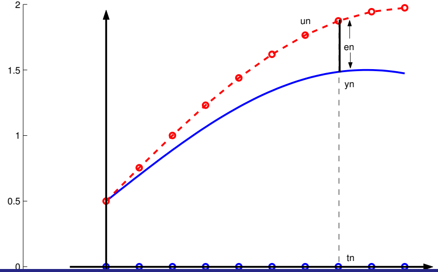
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in I \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2 \ldots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

et de l'équation (14) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \dfrac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h) \\ e_0 = 0. \end{cases} \tag{15}$$



Démonstration II

On a les équations suivantes pour $y(t)$ et u_n.

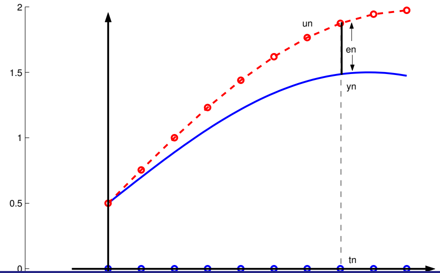
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in I \qquad \begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \quad n = 0, 1, 2 \ldots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

et de l'équation (14) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \dfrac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h) \\ e_0 = 0. \end{cases} \tag{15}$$



Démonstration III

D'après le théorème de Lagrange, il existe ξ_n tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}(u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe η_n tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h\frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h\frac{h}{2}y''(\eta_n).$$

Si $h < \frac{2}{\lambda_{max}}$, on a $1 + h\frac{\partial f(t,\xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$ et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme $e_0 = 0$, on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.

Démonstration III

$\xi \in [u_n, y(t_n)]$
ou $[y(t_n), u_n]$

D'après le théorème de Lagrange, il existe ξ_n tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}(u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe η_n tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h\frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h\frac{h}{2} y''(\eta_n).$$

Si $h < \frac{2}{\lambda_{max}}$, on a $1 + h\frac{\partial f(t,\xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$ et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme $e_0 = 0$, on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.

Démonstration III

D'après le théorème de Lagrange, il existe ξ_n tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t,\xi_n)}{\partial y}(u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t,\xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe η_n tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h\frac{\partial f(t,\xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h\frac{h}{2}y''(\eta_n).$$

Si $h < \frac{2}{\lambda_{max}}$, on a $1 + h\frac{\partial f(t,\xi_n)}{\partial y} \in (-1,1)$ et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme $e_0 = 0$, on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.

Démonstration III

D'après le théorème de Lagrange, il existe ξ_n tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}(u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe η_n tel qu'à partir de (15) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h\frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h\frac{h}{2}y''(\eta_n).$$

Si $h < \frac{2}{\lambda_{max}}$, on a $1 + h\frac{\partial f(t,\xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$ et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme $e_0 = 0$, on en déduit

$\tau_h \to 0$

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n \boxed{\tau(h)},$$

donc on trouve bien l'estimation recherchée.

Méthodes de Runge-Kutta

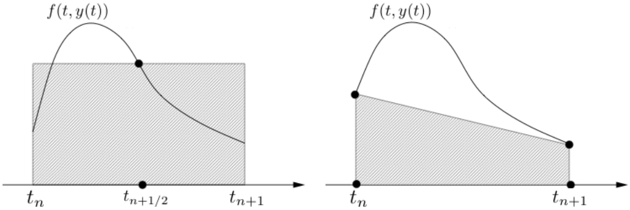
Si on intègre l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1}, on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt. \tag{16}$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt =$$

Remarque

Méthodes d'intégration numérique



En utilisant la formule du trapèze, on trouve le schéma implicite suivant, appelé **schéma de Crank-Nicolson ou du trapèze** :

$$\boxed{u_0 = y(t_0), \quad u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right], \quad n = 0, 1, \ldots} \tag{17}$$

Ce schéma, qui est implicite, est inconditionnellement stable lorsqu'il est appliqué au problème modèle (3).

EP: $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$

En modifiant le schéma (17) afin de le rendre explicite, on identifie **la méthode de Heun** :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))\right].} \tag{18}$$

Ces deux méthodes sont d'ordre 2 par rapport à h.

Si on utilise dans (16) la méthode du point milieu, on trouve

$$u_{n+1} - u_n = h\, f(t_{n+\frac{1}{2}}, u_{n+\frac{1}{2}}).$$

Si maintenant, on approche $u_{n+1/2}$ par

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n),$$

on trouve **la méthode d'Euler modifiée** :

$$\boxed{u_0 = y(t_0), \quad u_{n+1} - u_n = h\, f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n)\right) \quad n = 0, 1, \ldots}$$

Les méthodes de Heun et d'Euler modifiée sont des cas particuliers de la famille des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2. Lorsqu'elles sont appliquées au problème modèle (3), on a dans les deux cas la condition de stabilité $h < 2/|\lambda|$.

Il existe d'autres méthodes plus compliquées, comme par exemple **la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** suivante, qui est obtenue en considérant la méthode d'intégration de Simpson :

$$u_n \rightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ \text{avec :} \\ K_1 = f(t_n, u_n), \\ K_2 = f(t_n + \dfrac{h}{2}, u_n + \dfrac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(t_n + \dfrac{h}{2}, u_n + \dfrac{h}{2}K_2), \\ K_4 = f(t_{n+1}, u_n + hK_3). \end{cases}$$

Dans le tableau suivant, on résume les caractéristiques des méthodes qu'on a introduites :

Méthode	*Explicite/Implicite*	*Stabilité*	*P.r. à h*
Euler Progressive	Explicite	Conditionnellement	1
Euler Rétrograde	Implicite	Inconditionnellement	1
Crank–Nicolson	Implicite	Inconditionnellement	2
Heun	Explicite	Conditionnellement	2
Euler Modifiée	Explicite	Conditionnellement	2
Runge–Kutta	Explicite	Conditionnellement	4