Analyse Numérique SV

Équations différentielles ordinaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2022

Conditions de stabilité

Le choix du pas de temps h n'est pas arbitraire. Pour la méthode d'Euler progressive, on verra plus loin dans le cours que, si h n'est pas suffisamment petit, des problèmes de stabilité peuvent surgir.

Par exemple, si l'on considère le problème

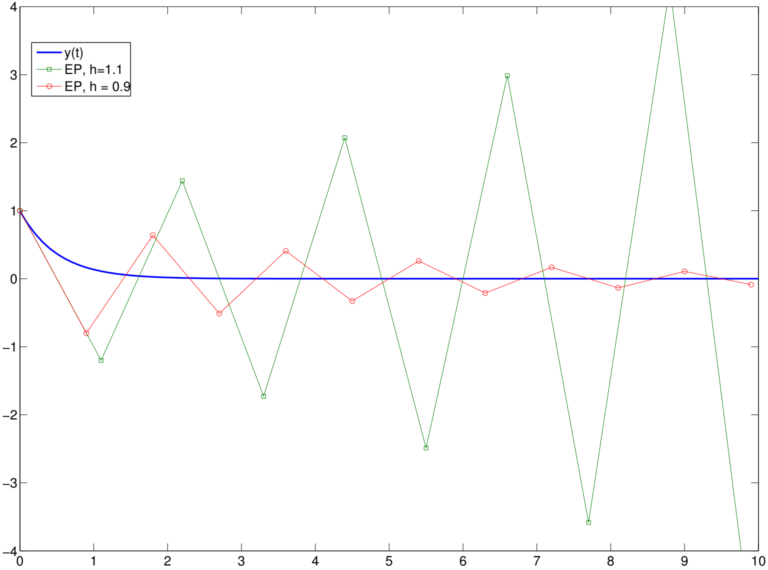
$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{5}$$

dont la solution est

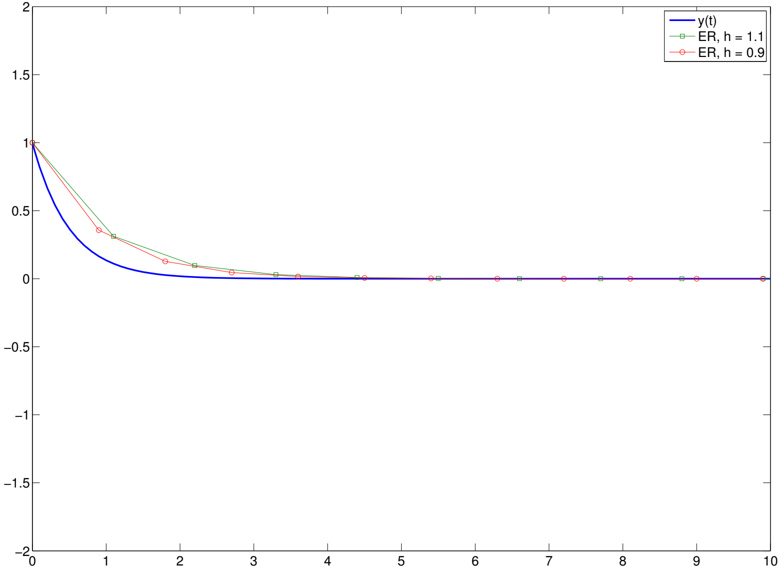
$$y(t) = e^{-2t},$$

on peut observer que les comportements par rapport à h des méthodes d'Euler progressive et rétrograde sont très différents.

Conditions de stabilité (EP)



Conditions de stabilité (ER)



La propriété de stabilité (absolue)

Pour $\lambda < 0$ donné, on considère le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

dont la solution est

$$y(t) = e^{\lambda t}. \qquad \text{En particulier,} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

Posons $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ tels que $t_n = nh$, où le *pas de temps* $h > 0$ est donné.

Un schéma de résolution associé à ce problème est appelé **absolument stable** si

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

- Pour le schéma d'**Euler progressif** :

$$u_{n+1} = (1+\lambda h)u_n, \qquad \text{d'où} \qquad u_n = (1+\lambda h)^n, \quad \forall n \geq 0. \tag{7}$$

Si $1+\lambda h < -1$, alors $|u_n| \to \infty$ quand $n \to \infty$, donc le schéma d'Euler progressif est *instable*.
Pour assurer la stabilité, on a besoin de *limiter le pas de temps* h, en imposant la **condition de stabilité** :

$$\boxed{|1+\lambda h| < 1 \text{ d'où } h < 2/|\lambda|.}$$

- Pour le schéma d'**Euler rétrograde** :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right) u_n \qquad \text{et donc} \qquad u_n = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Et comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, on a la stabilité sans condition sur h.

La stab. abs. contrôle les perturbations

Pour un problème général, on se pose la question de sa stabilité, c'est-à-dire de la propriété selon laquelle des petites perturbations sur les données induisent des "petites" perturbations sur la solution.

On veut montrer la propriété suivante.

Une méthode numérique absolument stable par rapport au problème modèle est stable (au sens précédent) pour un problème de Cauchy quelconque.

Problème modèle généralisé

Considérons le *problème modèle généralisé* suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t) + r(t), \quad t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{8}$$

avec λ et r des fonctions continues. Dans ce cas, la solution exacte ne tend pas forcément vers zéro lorsque t tend vers l'infini.
Par exemple, si r et λ sont constants, on a

$$y(t) = \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{\lambda t} - \frac{r}{\lambda}$$

dont la limite, lorsque t tend vers l'infini, est $-r/\lambda$. En général, il n'est pas naturel de demander la stabilité absolue à une méthode numérique quand on l'applique au problème (15).

Pour simplifier l'analyse, on restreindra notre étude au cas de la méthode d'Euler progressive appliquée à (15).

Ainsi, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h(\lambda_n u_n + r_n), \quad n \geq 0, \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

où $\lambda_n = \lambda(t_n)$ et $r_n = r(t_n)$.
On définit la méthode "perturbée" suivante :

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h(\lambda_n z_n + r_n + \rho_{n+1}), \quad n \geq 0, \\ z_0 = u_0 + \rho_0, \end{cases} \tag{9}$$

avec $\rho_0, \rho_1, \ldots$ des perturbations données introduites à chaque pas de temps.

Ceci est un modèle simple dans lequel ρ_0 et ρ_{n+1} représentent les erreurs de troncatures ou de résolutions numériques.

Question : Est-ce que la différence $z_n - u_n$ est bornée pour tout $n = 0, 1, \ldots$ indépendamment de n et h ?
On va considérer deux cas de complexité croissante.

(i) Soient $\lambda_n = \lambda$ et $\rho_n = \rho$ des constantes. Nous pouvons écrire le schéma pour l'erreur $e_n = z_n - u_n$

$$\begin{cases} e_{n+1} = e_n + h(\lambda e_n + \rho), & n \geq 0, \\ e_0 = \rho. \end{cases} \tag{10}$$

dont la solution est

$$e_n = \rho(1 + h\lambda)^n + h\rho \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h\lambda)^k = \rho\psi(h, \lambda), \tag{11}$$

avec

$$\psi(h, \lambda) = \left((1 + h\lambda)^n(1 + \frac{1}{\lambda}) - \frac{1}{\lambda}\right)$$

et où on a utilisé

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}. \tag{12}$$

Supposons que $h < h_0(\lambda) = 2/|\lambda|$, *c'est à dire que h assure la stabilité absolue de la méthode d'Euler progressive appliquée au problème modèle (6)*.
Donc $(1 + h\lambda)^n < 1 \ \forall n$ et on en déduit que l'erreur due aux perturbations vérifie

$$|e_n| \leq \varphi(\lambda)|\rho|, \tag{13}$$

avec $\varphi(\lambda) = 1 + |2/\lambda|$. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} |e_n| = \frac{|\rho|}{|\lambda|}.$$

Par conséquent, l'erreur des perturbations est bornée par $|\rho|$ fois une constante indépendante de n et h. Evidemment, si $h > h_0$, les perturbations s'amplifient quand n augmente car $(1 + h\lambda)^n \to \infty$ pour $n \to \infty$.

(ii) Dans le cas général où λ et r dépendent de t, on a que

$$z_n - u_n = \rho_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1 + h\lambda_k) + h \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{k+1} \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + h\lambda_j) \qquad (14)$$

On demande au pas de temps h de satisfaire la condition $h < h_0(\lambda)$, avec $h_0(\lambda) = 2/\lambda_{max}$. Ainsi, $|1 + h\lambda_k| \leq \max(|1 - h\lambda_{min}|, |1 - h\lambda_{max}|) < 1$. Soient $\rho = \max|\rho_n|$ et λ tel que $(1 + h\lambda) = \max(|1 - h\lambda_{min}|, |1 - h\lambda_{max}|)$.

Nous pouvons conclure, en constatant que :

$$\begin{aligned} |z_n - u_n| &\leq |\rho_0| \prod_{k=0}^{n-1} |1 + h\lambda_k| + h \sum_{k=0}^{n-1} |\rho_{k+1}| \prod_{j=k+1}^{n-1} |1 + h\lambda_j| \\ &\leq \rho \prod_{k=0}^{n-1}(1 + h\lambda) + h \sum_{k=0}^{n-1} \rho \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + h\lambda) = \rho\psi(h, \lambda) \end{aligned}$$

Ainsi, même dans ce cas, $e_n = z_n - u_n$ satisfait (13).

Condition de stabilité du problème modèle généralisé

Remarque

Reprenons le problème modèle généralisé

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t) + r(t), \quad t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{15}$$

Dans la méthode d'Euler Progressive, on peut contrôler les perturbations dans le cas où il existe $\lambda_{\min} > 0$ *et* $\lambda_{\max} < \infty$ *tels que*

$$-\lambda_{max} \leq \lambda(t) \leq -\lambda_{min}, \forall t \geq t_0 \tag{16}$$

et si on choisit $0 < h < 2/\lambda_{max}$.

Dans la méthode d'Euler Progressive, on peut contrôler les perturbations dans le cas où $\lambda(t) < 0$ pour tout $t \in (t_0, +\infty)$.

Condition de stabilité dans le cas général

Remarque

On considère maintenant le problème de Cauchy général

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t > 0 \\ y(0) = y_0 \ , \end{cases}$$

dans un intervalle non-borné.
Soit D_y l'ensemble qui contient la trajectoire de $y(t)$ ainsi que celle de u_n. Dans la méthode d'Euler Progressive, on peut étendre le contrôle des perturbations au problème modèle généralisé (15), dans le cas où il existe $\lambda_{\min} > 0$ et $\lambda_{\max} < \infty$ tels que

$$-\lambda_{max} \leq \partial f / \partial y(t, y) \leq -\lambda_{min}, \forall t \geq 0, \ \forall y \in D_y, \tag{17}$$

et si on choisit $0 < h < 2/\lambda_{max}$.