Analyse Numérique SV

Équations différentielles ordinaires
Stabilité de schémas numériques

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

Conditions de stabilité, Exemple

Le choix du pas de temps h n'est pas arbitraire. Pour la méthode d'Euler progressive, on verra plus loin dans le cours que, si h n'est pas suffisamment petit, des problèmes de stabilité peuvent surgir.

Par exemple, si l'on considère le problème

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

dont la solution est

$$y(t) = e^{-2t},$$

on peut observer que les comportements par rapport à h des méthodes d'Euler progressive et rétrograde sont très différents.

Écrivez les schémas d'EP et d'ER pour ce problème.

La propriété de stabilité (absolue) I

La propriété de stabilité (absolue) II

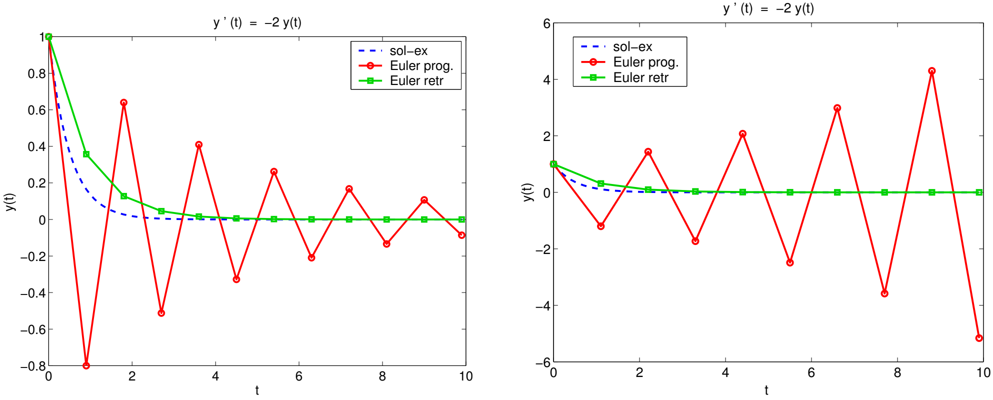
La propriété de stabilité (absolue) III

Exemple

On résout le problème (1) pour $\lambda = -2$ et $y_0 = 1$ dans l'intervalle $[0, 10]$ avec les méthodes d'Euler progressive et rétrograde et $h = 0.9$ et $h = 1.1$. Voilà les commandes Python pour le cas $h = 0.9$:

```
l = -2
f = lambda t,x :   l*x
y0 = 1; tspan=[0, 10]
h = 1.1; Nh = int( np.ceil((tspan[1] - tspan[0])/h) )
t_EP, y_EP = forwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
t_ER, y_ER = backwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
```

On remarque que, même si $f(t, y)$ ne dépend pas explicitement de t, il faut la définir comme une fonction de (t, y).
La figure suivante montre les solutions obtenues pour $h = 0.9$ (à gauche) et $h = 1.1$ (à droite) ainsi que la solution exacte.



Comparaison entre les solutions obtenues par les méthodes d'Euler progressive et rétrograde pour $h = 0.9$ (à gauche, stable) et $h = 1.1$ (à droite, instable) (condition de stabilité pour Euler progressif : $|\lambda| = 2 \Rightarrow h < 2/|\lambda| = 1$).

La propriété de stabilité (absolue) I

La propriété de stabilité (absolue) II

La propriété de stabilité (absolue) III

La stab. abs. contrôle les perturbations

Pour un problème général, on se pose la question de sa stabilité, c'est-à-dire de la propriété selon laquelle des petites perturbations sur les données induisent des "petites" perturbations sur la solution.

On veut montrer la propriété suivante.

Une méthode numérique absolument stable par rapport au problème modèle est stable (au sens précédent) pour un problème de Cauchy quelconque.

Problème modèle généralisé

Considérons le *problème modèle généralisé* suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t) + r(t), \quad t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

avec λ et r des fonctions continues. Dans ce cas, la solution exacte ne tend pas forcément vers zéro lorsque t tend vers l'infini.
Par exemple, si r et λ sont constants, on a

$$y(t) = \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{\lambda t} - \frac{r}{\lambda}$$

dont la limite, lorsque t tend vers l'infini, est $-r/\lambda$. En général, il n'est pas naturel de demander la stabilité absolue à une méthode numérique quand on l'applique au problème (2).

Condition de stabilité du problème modèle généralisé

Condition de stabilité dans le cas général

Exemple

Exemple

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (-2 + sin(t))y(t) + e^{-3t}, \quad t \in (0, +\infty), \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Ecrivez les Schemas d'Euleur Progressif et Retrograde pour ce problème de Cauchy. Ensuite calculez

- $\lambda(t)$
- $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$
- La condition de stabilité pour Euler Progressive et Retrograde

Exemple I

- A $\lambda(t) = (-2 + sin(t))y(t)$
- B $\lambda(t) = (-2 + sin(t))$
- C $\lambda(t) = e^{-3t}$
- D $\lambda(t) = (-2 + sin(t))y(t) + e^{-3t}$

Exemple II

- A $\lambda_{\min} = 1$ et $\lambda_{\max} = 3$
- B $\lambda_{\min} = -3$ et $\lambda_{\max} = -1$
- C $\lambda_{\min} = 0$ et $\lambda_{\max} = \infty$
- D $\lambda_{\min} = -1$ et $\lambda_{\max} = -3$

Exemple III

La méthode d'Euler Progressive est stable si $h > 0$ et

- A $h < \frac{1}{3}$
- B $h < \frac{2}{3}$
- C $h < \frac{2}{1}$
- D $h < \infty$ (i.e. tout $h > 0$)

Exemple IV

On an que $\lambda(t) \in [-3, -1]$, donc on peut choisir $\lambda_{\min} = 1$ et $\lambda_{\max} = 3$. Ainsi, la methode d'Euler progressive est stable si $h < 2/3$

Exemple V

La méthode d'Euler Retrograde est stable si $h > 0$ et

- A $h < \frac{1}{3}$
- B $h < \frac{2}{3}$
- C $h < \frac{2}{1}$
- D $h < \infty$ (i.e. tout $h > 0$)

Exemple I

Exemple II

Convergence I

$\Rightarrow$ slides 6.3

Exercice 2 Série 12

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = -e^t y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Écrivez la méthode d'Euler progressive pour approcher la solution $y(t)$.
b) Soit $h = \frac{1}{10}$. Calculez la solution approchée au temps $t_1 = t_0 + h$ (où $t_0 = 0$) en utilisant la méthode d'Euler progressive.
c) Déterminez pour quelles valeurs de h la condition de stabilité pour la méthode d'Euler progressive est satisfaite. Vérifiez que la méthode est stable pour la valeur $h = \frac{1}{10}$ utilisée au point b).
d) Refaites les points a-c) pour la méthode d'Euler retrograde

Exercice 2 Série 12, solution