

ANALYSE NUMÉRIQUE SV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021



EXEMPLES ET MOTIVATIONS

EXEMPLE

(Biologie) Considérons une population composée de y animaux dans un milieu ambiant où

- au plus B animaux peuvent coexister,
- initialement la population est de $y_0 \ll B$,
- le facteur de croissance des animaux est égal à une constante C ,
-

L'évolution de la population au cours du temps peut s'exprimer à travers l'équation

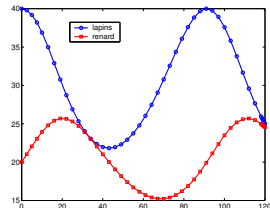
$$y'(t) = Cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{B} \right), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA

On considère maintenant deux populations composées de y_1 et de y_2 individus, où y_1 est le nombre de proies et y_2 le nombre de prédateurs. L'évolution des deux populations est alors décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1'(t) = C_1 y_1(t) [1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)], \\ y_2'(t) = -C_2 y_2(t) [1 - b_2 y_2(t) - d_1 y_1(t)]. \end{cases} \quad (1)$$

- C_1 et C_2 sont les facteurs de croissance des deux populations,
- d_1 et d_2 tiennent compte de l'interaction entre les deux populations,
- b_1 et b_2 sont liées à la nourriture disponible pour chaque population



INTRODUCTION

Soit $I = (t_0, T) \subset \mathbb{R}^+$, $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ donnée initiale

On cherche une fonction $y: \begin{matrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) \end{matrix}$

qui satisfait le problème suivant, appelé problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$



EXEMPLES I

- Un problème de Cauchy peut être **linéaire**, comme par exemple :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel $f(t, x) = 3x - 3t$ et dont la solution est $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$.

- On peut aussi avoir des problèmes **non-linéaires**, comme :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \mathcal{I} = (0, \infty)$$

avec $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$. Ce problème admet les **trois solutions** suivantes : $y(t) = 0$, $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$, $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$.

EXEMPLES II

- Le problème suivant :

$$f(t, x) = 1 + x^2$$

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet comme solution la fonction $y(t) = \tan(t)$ avec $0 < t < \frac{\pi}{2}$,
c'est-à-dire une **solution locale**.

EXEMPLES III

- Même si un problème est linéaire, il peut être instable (numériquement mal posé).

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = C \end{cases}$$

La solution analytique de ce problème est $y(t) = (C - \frac{1}{3})e^{3t} + t + \frac{1}{3}$.

- Pour $C_1 = \frac{1}{3}$, on a donc $y_1(t) = t + \frac{1}{3}$.
- Pour $C_2 = \frac{1}{3} + \epsilon$, on a $y_2(t) = \epsilon e^{3t} + t + \frac{1}{3}$.

Une erreur de ϵ sur la donnée initiale se propage exponentiellement dans le temps. Par exemple, pour $\epsilon = 10^{-6}$ et $t = 10$, on a une erreur de l'ordre de 10^7 .

THÉORÈME (DE CAUCHY-LIPSCHITZ, PROPOSITION 7.1 DU LIVRE)

Si la fonction $f(t, y)$ est

1. *continue* par rapport à ses deux variables ;
2. *lipschitzienne* par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive L (appelée constante de Lipschitz) telle que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad (2)$$

Alors la solution $y = y(t)$ du problème de Cauchy *existe*, est *unique* et appartient à $C^1(I)$.

Si f est différentiable par rapport à y , on peut remplacer la deuxième condition par

$$\sup_{y \in \mathbb{R}, t \in I} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| < \infty$$

EXEMPLE

On considère le problème (2) et on vérifie qu'il admet une solution unique et globale.

Dans ce cas, $f(t, v) = 3v - 3t$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |3y_1 - 3t - (3y_2 - 3t)| = |3y_1 - 3y_2| \leq 3|y_1 - y_2|$$

et donc

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \quad \text{avec} \quad L = 3.$$

Ainsi, f satisfait les hypothèses du théorème 1 et on peut affirmer que le problème (2) admet une solution globale et unique.

2



MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES POUR L'APPROXIMATION DU PROBLÈME DE CAUCHY

Soient $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$ (jusqu'à T ou ∞) tels que
 $t_n = t_0 + hn$ (équirépartis) $h \in \mathbb{R}$. On cherche une
 approximation: $u_n \approx y(t_n)$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On sait que $\begin{cases} y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

On va utiliser la dérivation numérique pour construire un schéma
 d'approximation $\{u_n\}_{n=0,1,\dots}$.
 — convergence
 — stabilité

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=0, 1, \dots, N_h-1 \\ t_n = t_0 + nh \end{matrix} \quad \begin{matrix} h \in \mathbb{R} \\ N_h \in \mathbb{N} \\ h = \frac{T - t_0}{N_h} \end{matrix}$$

Schéma d'Euler explicite ou Progressif.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t \in (t_0, T) = I$$

Schéma d'Euler rétrograde ou implicite.

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=0, 1, \dots, N_h-1 \\ t_n = t_0 + nh \end{matrix}$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

La méthode de Heun :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)) \right] & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right] & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Schéma du point milieu

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n) & \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \text{ à déterminer} \end{cases}$$

BDF 2

$$\begin{cases} \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) & \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \text{ à déterminer} \end{cases}$$

EXEMPLE

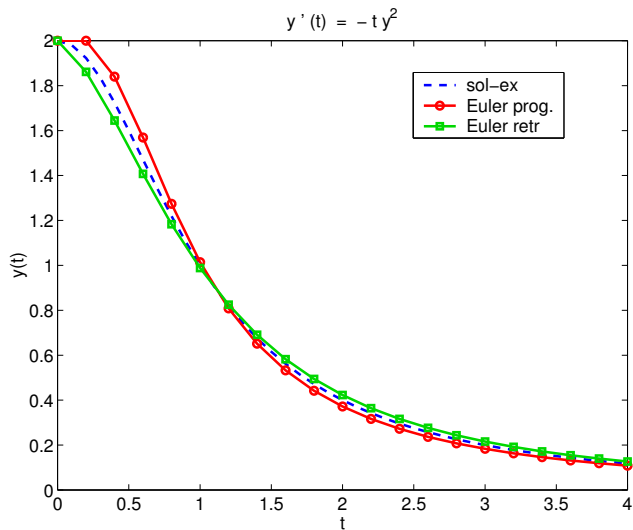
On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = -ty^2(t), & t > 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On veut résoudre cette équation avec les méthodes d'Euler progressive et Euler rétrograde, dans l'intervalle $[0, 4]$ avec $N_h = 20$ sous-intervalles, ce qui équivaut à un pas de temps $h = 0.2$ et donc à **approcher la solution exacte $y(t_n)$ aux instants $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, 20$ (donc $t_n = 0.2, 0.4, 0.6, \dots$) par une solution numérique u_n .**

```
f = lambda t,x : -t*x**2
y0 = 2; tspan=[0, 4]
Nh = 20
t_EP, y_EP = forwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
t_ER, y_ER = backwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
```

Comparaison entre la solution exacte et celles obtenues par les méthodes d'Euler progressive et rétrograde.



EXPLICITE OU IMPLICITE

REMARQUE

- Le schéma d'Euler progressif est un *schéma explicite* car il permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n explicitement :

$$(EP) \quad \begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n). \end{cases}$$

- Le schéma d'Euler rétrograde est un *schéma implicite* car u_{n+1} est défini implicitement en fonction de u_n :

$$(ER) \quad \begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}). \end{cases}$$

En général, pour le schéma d'Euler rétrograde, il faut résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps.

Méthode du point fixe : Notons que (ER) est équivalent à un problème de point fixe avec

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}) = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= u_n + hf(t_{n+1}, x) \\ x_0 &= u_n + hf(t_n, u_n)\end{aligned}$$

On peut résoudre ce problème grâce aux itérations suivantes

$$\begin{aligned}u_{n+1}^0 &= u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1}^{k+1} &= \phi(u_{n+1}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Méthode de Newton : À partir de l'équation :

$$F(x) = x - u_n - hf(t_{n+1}, x)$$

$$F(u_{n+1}) \equiv u_{n+1} - \phi(u_{n+1}) = 0,$$

on utilise les itérations suivantes :

$$x_0 = u_n + hf(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{F'(u_{n+1}^k)} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{1 - \phi'(u_{n+1}^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dans les deux cas, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n+1}^k = u_{n+1}$.

Quelles méthodes sont implicites ?

A Euler Progressive

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

B Euler Retrograde

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

C Heun

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)) \right]$$

D Crank Nicolson

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right]$$

E Point milieu

$$\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n)$$

F BDF 2

$$\frac{3f(x_{n+1})-4f(x_n)+f(x_{n-1}))}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$$



CONDITIONS DE STABILITÉ

Le choix du pas de temps h n'est pas arbitraire. Pour la méthode d'Euler progressive, on verra plus loin dans le cours que, si h n'est pas suffisamment petit, des problèmes de stabilité peuvent surgir.

Par exemple, si l'on considère le problème

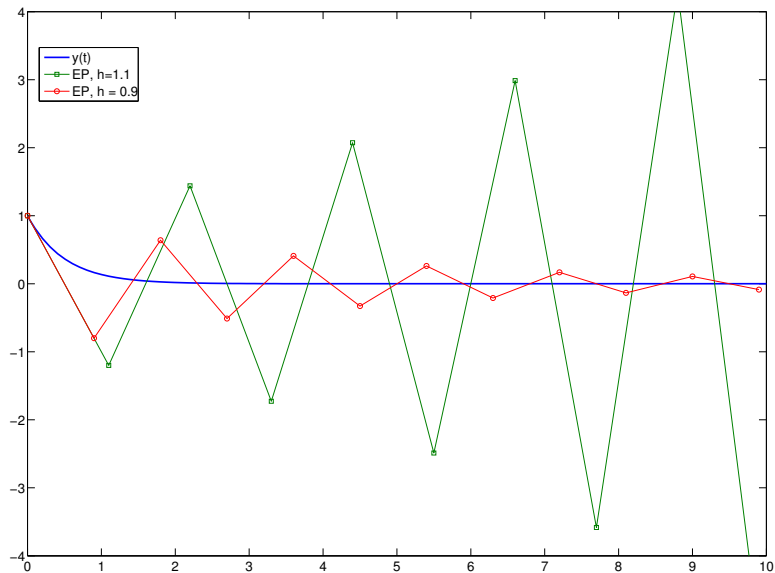
$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

dont la solution est

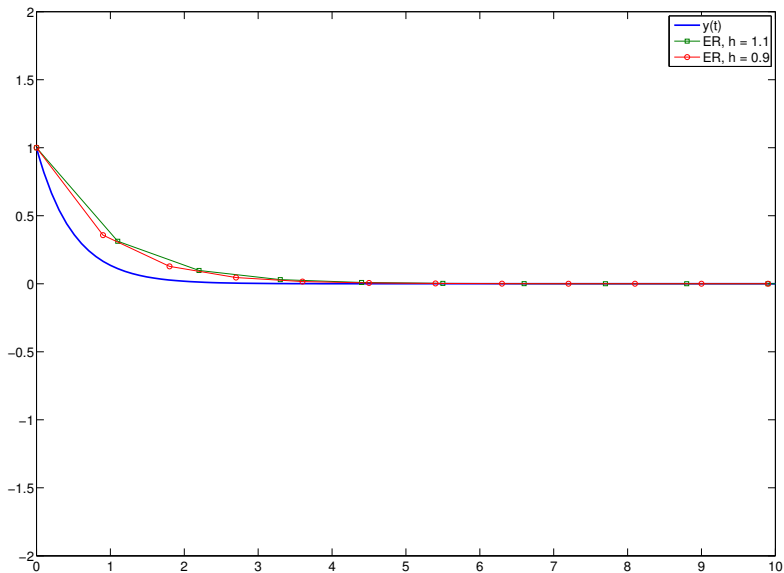
$$y(t) = e^{-2t},$$

on peut observer que les comportements par rapport à h des méthodes d'Euler progressive et rétrograde sont très différents.

CONDITIONS DE STABILITÉ (EP)

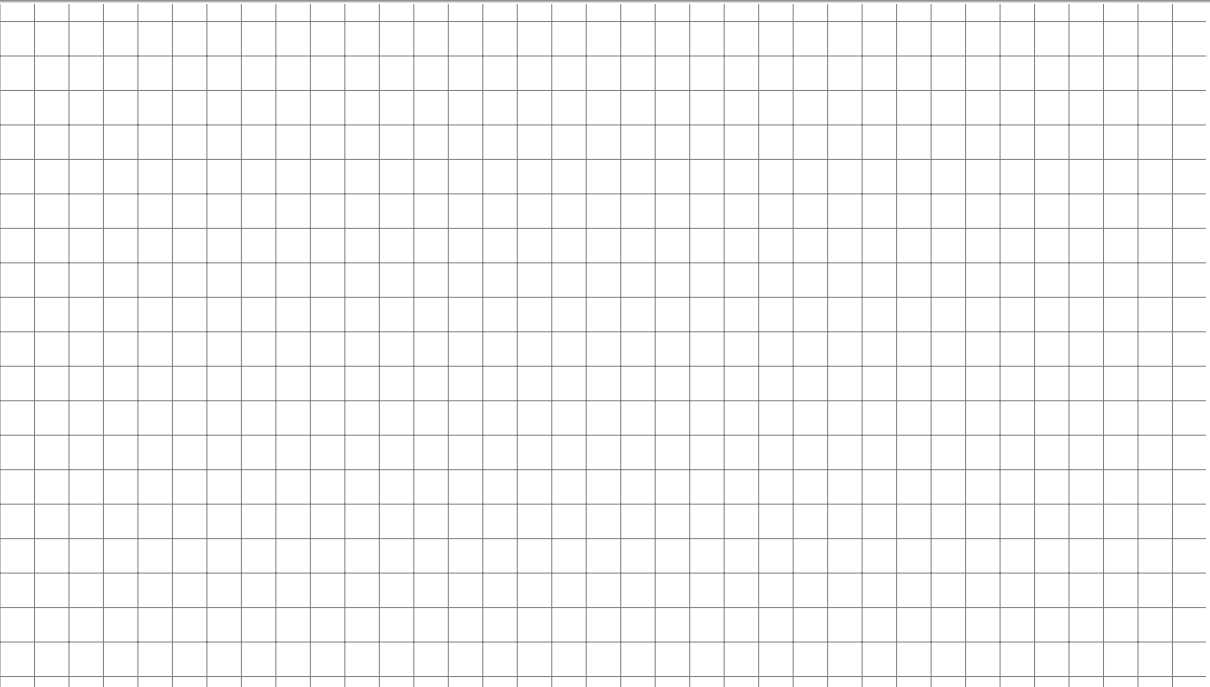


CONDITIONS DE STABILITÉ (ER)



LA PROPRIÉTÉ DE STABILITÉ (ABSOLUE)





LA STAB. ABS. CONTRÔLE LES PERTURBATIONS



Problème modèle généralisé

Considérons le *problème modèle généralisé* suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t) + r(t), & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (4)$$

avec λ et r des fonctions continues et $-\lambda_{\max} \leq \lambda(t) \leq -\lambda_{\min}$ où $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < +\infty$. Dans ce cas, la solution exacte ne tend pas forcément vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Par exemple, si r et λ sont constants, on a

$$y(t) = \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{\lambda t} - \frac{r}{\lambda}$$

dont la limite, lorsque t tend vers l'infini, est $-r/\lambda$. En général, il n'est pas naturel de demander la stabilité absolue à une méthode numérique quand on l'applique au problème (2).

Pour simplifier l'analyse, on restreindra notre étude au cas de la méthode d'Euler progressive appliquée à (2).

Ainsi, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h(\lambda_n u_n + r_n), & n \geq 0, \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

où $\lambda_n = \lambda(t_n)$ et $r_n = r(t_n)$.

On définit la méthode “perturbée” suivante :

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h(\lambda_n z_n + r_n + \rho_{n+1}), & n \geq 0, \\ z_0 = u_0 + \rho_0, \end{cases} \quad (5)$$

avec ρ_0, ρ_1, \dots des perturbations données introduites à chaque pas de temps.

Ceci est un modèle simple dans lequel ρ_0 et ρ_{n+1} représentent les erreurs de troncatures ou de résolutions numériques.

Question : Est-ce que la différence $z_n - u_n$ est bornée pour tout $n = 0, 1, \dots$ indépendamment de n et h ?

On va considérer deux cas de complexité croissante.

(i) Soient $\lambda_n = \lambda$ et $\rho_n = \rho$ des constantes. Nous pouvons écrire le schéma pour l'erreur $e_n = z_n - u_n$

$$\begin{cases} e_{n+1} = e_n + h(\lambda e_n + \rho), & n \geq 0, \\ e_0 = \rho. \end{cases} \quad (6)$$

dont la solution est

$$e_n = \rho(1 + h\lambda)^n + h\rho \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h\lambda)^k = \rho\psi(h, \lambda), \quad (7)$$

avec

$$\psi(h, \lambda) = \left((1 + h\lambda)^n \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda} \right)$$

et où on a utilisé

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}. \quad (8)$$

Supposons que $h < h_0(\lambda) = 2/|\lambda|$, *c'est à dire que h assure la stabilité absolue de la méthode d'Euler progressive appliquée au problème modèle (1).*

Donc $(1 + h\lambda)^n < 1 \forall n$ et on en déduit que l'erreur due aux perturbations vérifie

$$|e_n| \leq \varphi(\lambda)|\rho|, \quad (9)$$

avec $\varphi(\lambda) = 1 + |2/\lambda|$. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e_n| = \frac{|\rho|}{|\lambda|}.$$

Par conséquent, l'erreur des perturbations est bornée par $|\rho|$ fois une constante indépendante de n et h . Evidemment, si $h > h_0$, les perturbations s'amplifient quand n augmente car $(1 + h\lambda)^n \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$.

(ii) Dans le cas général où λ et r dépendent de t , on a que

$$z_n - u_n = \rho_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + h\lambda_k) + h \sum_{k=0}^{n-1} \rho_{k+1} \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + h\lambda_j) \quad (10)$$

On demande au pas de temps h de satisfaire la condition $h < h_0(\lambda)$, avec $h_0(\lambda) = 2/\lambda_{\max}$. Ainsi, $|1 + h\lambda_k| \leq \max(|1 - h\lambda_{\min}|, |1 - h\lambda_{\max}|) < 1$. Soient $\rho = \max |\rho_n|$ et λ tel que $(1 + h\lambda) = \max(|1 - h\lambda_{\min}|, |1 - h\lambda_{\max}|)$.

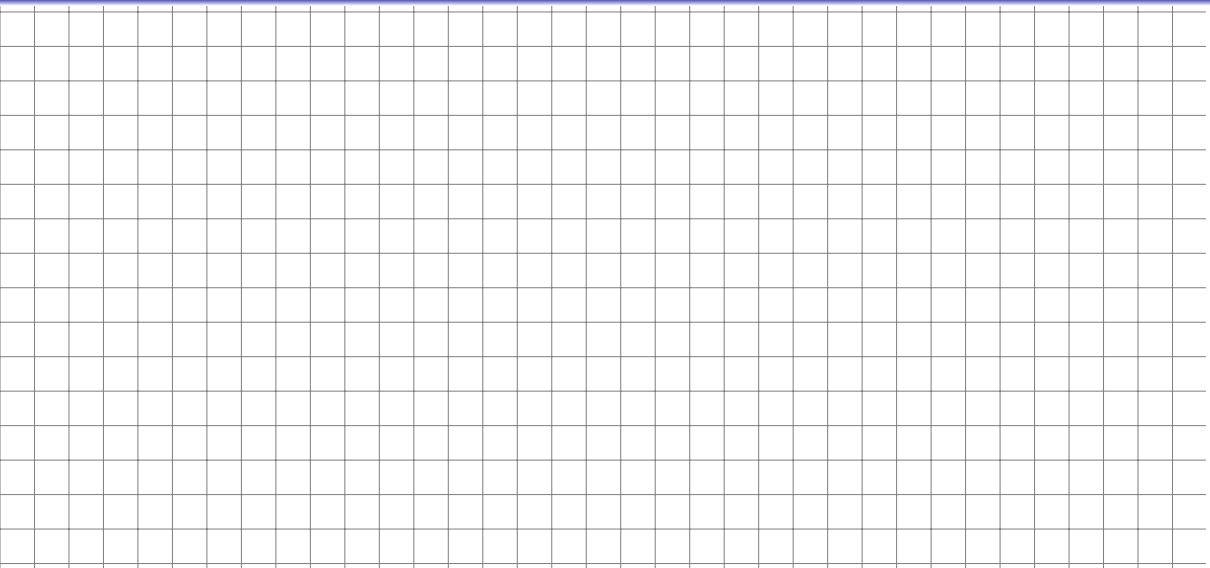
Nous pouvons conclure, en constatant que :

$$\begin{aligned} |z_n - u_n| &\leq |\rho_0| \prod_{k=0}^{n-1} |1 + h\lambda_k| + h \sum_{k=0}^{n-1} |\rho_{k+1}| \prod_{j=k+1}^{n-1} |1 + h\lambda_j| \\ &\leq \rho \prod_{k=0}^{n-1} (1 + h\lambda) + h \sum_{k=0}^{n-1} \rho \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + h\lambda) = \rho \psi(h, \lambda) \end{aligned}$$

Ainsi, même dans ce cas, $e_n = z_n - u_n$ satisfait (7).



CONDITION DE STABILITÉ DU PROBLÈME MODÈLE GÉNÉRALISÉ



CONDITION DE STABILITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL



CONVERGENCE

DÉFINITION

Soit $y(t)$ la solution du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, T]$; soit u_n une solution approchée au temps $t_n = nh$ trouvée par une méthode numérique donnée, où $h = T/N_h$ ($N_h \in \mathbb{N}$) est le pas de temps. La méthode est dite *convergente* si

$$\forall n = 0, \dots, N_h : |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

où $C(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Si, en plus, il existe $p > 0$ tel que $C(h) = Kh^p$ pour une constante K qui ne dépend pas de h ni de n , on dit que la méthode est *convergente d'ordre p* .

Dans la suite du cours, on va analyser la convergence et l'ordre de la méthode d'Euler progressive.

CONVERGENCE D'EULER PROGRESSIF

THÉORÈME

Si $y \in \mathcal{C}^2([0, T])$ et f satisfait $-\infty < -\lambda_{\max} \leq \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \leq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$. alors la méthode d'Euler progressive est convergente et

$$\forall n \geq 0, \quad |y(t_n) - u_n| \leq c(t_n)h, \quad \text{où } c(t_n) = t_n \frac{1}{2} \max_{t \in [t_0, t_n]} |y''(t)|, \quad (11)$$

En particulier, la méthode est convergente d'ordre $p = 1$, avec

$$C(h) = c(T)h.$$

REMARQUE

Le même type de résultat peut être établi pour la méthode d'Euler rétrograde.

DÉMONSTRATION I

On définit l'*erreur de troncature locale* de la méthode d'Euler progressive comme

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n), \quad (12)$$

et l'*erreur de troncature globale*

$$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)|.$$

On sait (voir *différences finies*) que

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |y''(t)| h.$$

Donc, on a l'estimation suivante pour l'erreur de troncature globale :

$$\tau(h) \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |y''(t)| h.$$

DÉMONSTRATION II

On a les équations suivantes pour $y(t)$ et u_n .

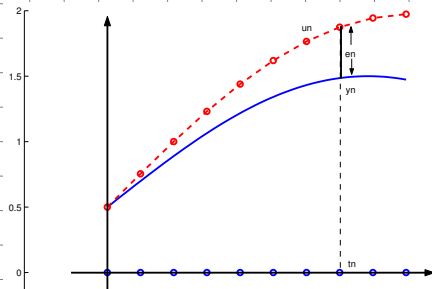
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) & n = 0, 1, 2, \dots, N_h \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

et de l'équation (10) pour l'erreur de troncature locale

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)),$$

on obtient pour $e_n = u_n - y(t_n)$

$$\begin{cases} \frac{e_{n+1} - e_n}{h} = f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) - \tau_{n+1}(h), \\ e_0 = 0. \end{cases} \quad (13)$$



DÉMONSTRATION III

D'après le théorème de Lagrange, il existe ξ_n tel que

$$f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} (u_n - y(t_n)) = \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial y} e_n.$$

Donc il existe η_n tel qu'à partir de (11) on trouve

$$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y}\right) e_n - h \frac{h}{2} y''(\eta_n).$$

Si $h < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, on a $1 + h \frac{\partial f(t, \xi_n)}{\partial y} \in (-1, 1)$ et donc

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h\tau(h) \leq (|e_{n-1}| + h\tau(h)) + h\tau(h) \leq |e_0| + (n+1)h\tau(h).$$

Comme $e_0 = 0$, on en déduit

$$|e_n| \leq nh\tau(h) = t_n\tau(h),$$

donc on trouve bien (9).

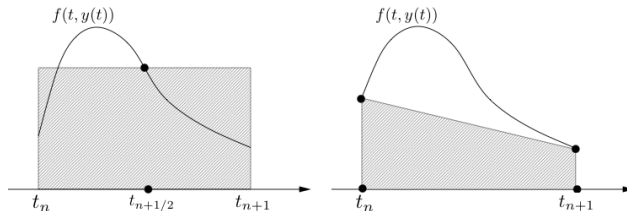
MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Si on intègre l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1} , on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (14)$$

REMARQUE

Méthodes d'intégration numérique



En utilisant la formule du trapèze, on trouve le schéma implicite suivant, appelé **schéma de Crank-Nicolson ou du trapèze** :

$$u_0 = y(t_0), \quad u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})], \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Ce schéma, qui est implicite, est inconditionnellement stable lorsqu'il est appliqué au problème modèle (1).

En modifiant le schéma (13) afin de le rendre explicite, on identifie **la méthode de Heun** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))]. \quad (16)$$

Ces deux méthodes sont d'ordre 2 par rapport à h .

Si on utilise dans (12) la méthode du point milieu, on trouve

$$u_{n+1} - u_n = h f(t_{n+\frac{1}{2}}, u_{n+\frac{1}{2}}).$$

Si maintenant, on approche $u_{n+1/2}$ par

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n),$$

on trouve **la méthode d'Euler modifiée** :

$$u_0 = y(t_0), \quad u_{n+1} - u_n = h f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n)\right) \quad n = 0, 1, \dots$$

Les méthodes de Heun et d'Euler modifiée sont des cas particuliers de la famille des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2. Lorsqu'elles sont appliquées au problème modèle (1), on a dans les deux cas la condition de stabilité $h < 2/|\lambda|$.

Il existe d'autres méthodes plus compliquées, comme par exemple **la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** suivante, qui est obtenue en considérant la méthode d'intégration de Simpson :

$$u_n \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ \text{avec :} \\ K_1 = f(t_n, u_n), \\ K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_2\right), \\ K_4 = f(t_{n+1}, u_n + hK_3). \end{array} \right.$$

Dans le tableau suivant, on résume les caractéristiques des méthodes qu'on a introduites :

<i>Méthode</i>	<i>Explicite/Implicite</i>	<i>Stabilité</i>	<i>P.r. à h</i>
Euler Progressive	Explicite	Conditionnellement	1
Euler Rétrograde	Implicite	Inconditionnellement	1
Crank–Nicolson	Implicite	Inconditionnellement	2
Heun	Explicite	Conditionnellement	2
Euler Modifiée	Explicite	Conditionnellement	2
Runge–Kutta	Explicite	Conditionnellement	4



SYSTÈME D'EDO

Considérons un système non homogène d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) & t > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (17)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $b(t) \in \mathbb{R}^p$, où l'on suppose que A possède p valeurs propres distinctes λ_j , $j = 1, \dots, p$.

Du point de vue numérique, les méthodes introduites dans le cas scalaire peuvent être étendues aux systèmes d'équations différentielles. Par exemple, le schéma d'Euler progressif devient :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = Au_n + b_n & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0, \end{cases} \quad (18)$$

tandis que la méthode d'Euler rétrograde (??) devient

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = Au_{n+1} + b_{n+1} & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0, \end{cases} \quad (19)$$

En ce qui concerne la stabilité, si $b \equiv 0$ et les valeurs propres λ_j ($j = 1, \dots, p$) de la matrice A sont strictement négatives : $\lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, p$, alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et la méthode d'Euler progressive est stable (c-à-d $u_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$) pourvu que

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)}, \quad (20)$$

où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A , tandis que la méthode d'Euler rétrograde est inconditionnellement stable.

EXEMPLE

Le système linéaire

$$\begin{cases} y_1'(t) &= -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) - 4y_2(t) \end{cases} \quad (21)$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, s'écrit sous la forme (15), où

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

Soit $h > 0$ le pas de temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = nh$, $b_n = b(t_n)$ et on désigne par u_n une valeur approchée de la solution exacte $y(t_n)$ au temps t_n .

Les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution $y(t)$ de (19) s'écrivent respectivement :

$$\text{Euler progressif} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hAu_n + hb_n = (I + hA)u_n + hb_n \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Euler rétrograde} \quad \begin{cases} (I - hA)u_{n+1} = u_n + hb_{n+1} \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Crank-Nicolson} \quad \begin{cases} (I - \frac{h}{2}A)u_{n+1} = (I + \frac{h}{2}A)u_n + \frac{h}{2}(b_n + b_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

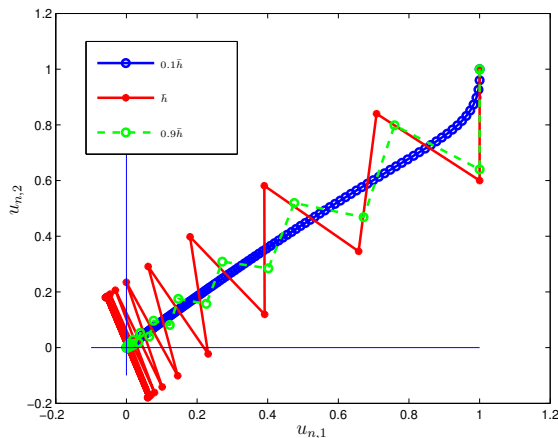
$$n = 0, 1, \dots, N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes de ER et CN, il faut résoudre un système linéaire avec pour matrice $I - hA$ et $I - \frac{h}{2}A$ respectivement (il s'agit de méthodes implicites).

La méthode d'Euler progressive est explicite (il n'y a pas de système linéaire à résoudre), par contre elle est seulement conditionnellement stable. Dans notre cas, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -5$; elles sont bien négatives, donc la condition (18) sur h s'applique : comme $\rho(A) = 5$, cette condition de stabilité est

$$h < \bar{h} = \frac{2}{5}.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (19) avec condition initiale $y_0 = [1, 1]^T$ et différentes valeurs du pas de temps h .



On peut aussi considérer le cas d'un système non linéaire de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) & t \in (t_0, T), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

(par exemple le système (??)). Si $\frac{\partial F}{\partial y}$ est une matrice à valeurs propres réelles et négatives alors la méthode d'**Euler rétrograde** est inconditionnellement stable.

Si, pour tout t in $[t_0, T]$, tout $y \in \mathbb{R}^n$, il vaut que

$$-\lambda_{\max} \leq \lambda < \lambda_{\min} < 0 \text{ pour toutes les valeurs propres } \lambda \text{ de } \frac{\partial F(t, y)}{\partial y}$$

alors le schéma d'**Euler progressif** est stable sous la condition

$$h < \frac{2}{\lambda_{\max}},$$

EXEMPLE

Le système non-linéaire

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t} \sin(t), \\y_2'(t) &= \cos(y_1(t)) - 4y_2(t),\end{aligned}\tag{22}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, s'écrit sous la forme

$$y'(t) = F(t, y(t)),$$

où

$$F(t, y(t)) = \begin{bmatrix} -2y_1(t) + \sin(y_2(t)) + e^{-t} \sin(t) \\ \cos(y_1(t)) - 4y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Soit $h > 0$ le pas de temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = nh$ et on désigne par u_n une valeur approchée de la solution exacte $y(t_n)$ au temps t_n .

Les schémas d'Euler progressif, rétrograde et de Crank-Nicolson pour approcher la solution $y(t)$ de (20) s'écrivent respectivement :

$$\text{Euler progressif} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

$$\text{Euler rétrograde} \quad \begin{cases} u_{n+1} + hF(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n, \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

$$\text{Crank-Nicolson} \quad \begin{cases} u_{n+1} - \frac{h}{2}F(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n + \frac{h}{2}F(t_n, u_n), \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \dots, N_h - 1$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape des méthodes d'Euler rétrograde et Crank-Nicolson, il faut résoudre un système non-linéaire.

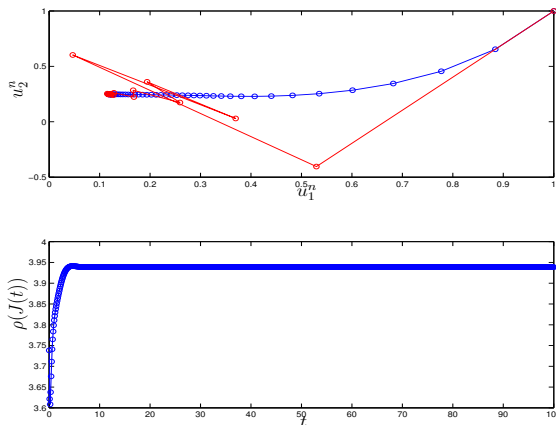
La méthode d'Euler progressive est explicite (pas de système à résoudre) mais, par contre, elle est seulement conditionnellement stable. Dans notre cas, le jacobien de F est donné par

$$J = \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} -2 & \cos y_2 \\ -\sin y_1 & -4 \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - \sin y_1 \cos y_2}$; elles sont bien négatives, en particulier $-3 - \sqrt{2} < \lambda_{1,2} < -3 + \sqrt{2} < 0$, et $\rho(J) < 3 + \sqrt{2}$. La condition de stabilité est ainsi :

$$h < \bar{h} = \frac{2}{\rho(J)}, \quad \text{satisfaite par exemple si } h < \frac{2}{3 + \sqrt{2}} \simeq 0.453.$$

Comportement du schéma d'Euler progressif pour le système (20) avec condition initiale $y_0 = [1, 1]^T$: $h = 0.1$ (bleu) et $h = 0.8\bar{h}$ (rouge). Si on prend $h \geq \bar{h}$, on peut observer l'instabilité de la méthode.



Voici un résumé concernant la stabilité :

Problème		Stabilité des méthodes explicites
Modèle	$y' = \lambda y$	$h < 2/ \lambda $
Cauchy	$y' = f(t, y(t))$	$h < 2 / \max \left \frac{\partial f}{\partial y} \right $
Systèmes Eq. Linéaires	$y' = Ay + b$	$h < 2/\rho(A)$
Systèmes Eq. Non-Linéaires	$y' = F(t, y(t))$	$h < 2/\rho(J)$

avec

- $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$, pour un système d'équations linéaires ;
- $\rho(J) = \max_i |\lambda_i(J)|$, pour un système d'équations non-linéaires, où

$$J(t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}, \text{ avec } \lambda_i(J) < 0, \forall i.$$