

ANALYSE NUMÉRIQUE SV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021



EXEMPLES ET MOTIVATIONS

EXEMPLE

(Biologie) Considérons une population composée de y animaux dans un milieu ambiant où

- au plus B animaux peuvent coexister,
- initialement la population est de $y_0 \ll B$,
- le facteur de croissance des animaux est égal à une constante C ,
-

L'évolution de la population au cours du temps peut s'exprimer à travers l'équation

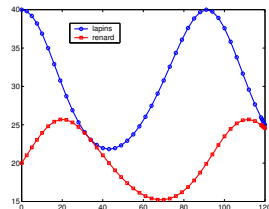
$$y'(t) = Cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{B} \right), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA

On considère maintenant deux populations composées de y_1 et de y_2 individus, où y_1 est le nombre de proies et y_2 le nombre de prédateurs. L'évolution des deux populations est alors décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1'(t) = C_1 y_1(t) [1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)], \\ y_2'(t) = -C_2 y_2(t) [1 - b_2 y_2(t) - d_1 y_1(t)]. \end{cases} \quad (1)$$

- C_1 et C_2 sont les facteurs de croissance des deux populations,
- d_1 et d_2 tiennent compte de l'interaction entre les deux populations,
- b_1 et b_2 sont liées à la nourriture disponible pour chaque population



INTRODUCTION



EXEMPLES I

- Un problème de Cauchy peut être **linéaire**, comme par exemple :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel $f(t, v) = 3v - 3t$ et dont la solution est $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$.

- On peut aussi avoir des problèmes **non-linéaires**, comme :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

avec $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$. Ce problème admet les **trois solutions** suivantes : $y(t) = 0$, $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$, $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$.

EXEMPLES II

- Le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet comme solution la fonction $y(t) = \tan(t)$ avec $0 < t < \frac{\pi}{2}$,
c'est-à-dire une **solution locale**.

EXEMPLES III

- Même si un problème est linéaire, il peut être instable (numériquement mal posé).

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = C \end{cases}$$

La solution analytique de ce problème est $y(t) = (C - \frac{1}{3})e^{3t} + t + \frac{1}{3}$.

- Pour $C_1 = \frac{1}{3}$, on a donc $y_1(t) = t + \frac{1}{3}$.
- Pour $C_2 = \frac{1}{3} + \epsilon$, on a $y_2(t) = \epsilon e^{3t} + t + \frac{1}{3}$.

Une erreur de ϵ sur la donnée initiale se propage exponentiellement dans le temps. Par exemple, pour $\epsilon = 10^{-6}$ et $t = 10$, on a une erreur de l'ordre de 10^7 .

THÉORÈME (DE CAUCHY-LIPSCHITZ, PROPOSITION 7.1 DU LIVRE)

Si la fonction $f(t, y)$ est

1. *continue* par rapport à ses deux variables ;
2. *lipschitzienne* par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive L (appelée constante de Lipschitz) telle que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad (2)$$

Alors la solution $y = y(t)$ du problème de Cauchy *existe*, est *unique* et appartient à $C^1(I)$.

Si f est différentiable par rapport à y , on peut remplacer la deuxième condition par

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}, t \in I} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| < \infty$$

EXEMPLE

On considère le problème (5) et on vérifie qu'il admet une solution unique et globale.

Dans ce cas, $f(t, v) = 3v - 3t$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |3y_1 - 3t - (3y_2 - 3t)| = |3y_1 - 3y_2| \leq 3|y_1 - y_2|$$

et donc

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \text{avec} \quad L = 3.$$

Ainsi, f satisfait les hypothèses du théorème 1 et on peut affirmer que le problème (5) admet une solution globale et unique.



MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES POUR L'APPROXIMATION DU PROBLÈME DE CAUCHY

La méthode de Heun :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)) \right] & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right] & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Schéma du point milieu

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n) & \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \text{ à déterminer} \end{cases}$$

BDF 2

$$\begin{cases} \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) & \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \text{ à déterminer} \end{cases}$$

EXEMPLE

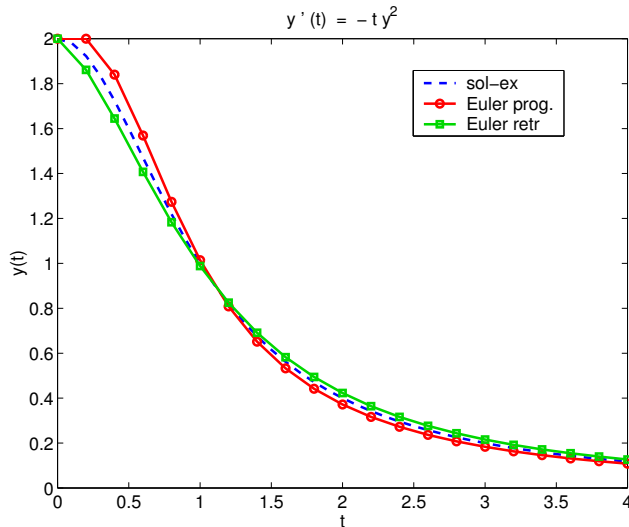
On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = -ty^2(t), & t > 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On veut résoudre cette équation avec les méthodes d'Euler progressive et Euler rétrograde, dans l'intervalle $[0, 4]$ avec $N_h = 20$ sous-intervalles, ce qui équivaut à un pas de temps $h = 0.2$ et donc à **approcher la solution exacte $y(t_n)$ aux instants $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, 20$ (donc $t_n = 0.2, 0.4, 0.6, \dots$) par une solution numérique u_n .**

```
f = lambda t,x : -t*x**2
y0 = 2; tspan=[0, 4]
Nh = 20
t_EP, y_EP = forwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
t_ER, y_ER = backwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
```

Comparaison entre la solution exacte et celles obtenues par les méthodes d'Euler progressive et rétrograde.



EXPLICITE OU IMPLICITE

REMARQUE

- Le schéma d'Euler progressif est un *schéma explicite* car il permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n explicitement :

$$(EP) \quad u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n).$$

- Le schéma d'Euler rétrograde est un *schéma implicite* car u_{n+1} est défini implicitement en fonction de u_n :

$$(ER) \quad u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

En général, pour le schéma d'Euler rétrograde, il faut résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps.

Méthode du point fixe : Notons que (ER) est équivalent à un problème de point fixe avec

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}) = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

On peut résoudre ce problème grâce aux itérations suivantes

$$u_{n+1}^{k+1} = \phi(u_{n+1}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Méthode de Newton : À partir de l'équation :

$$F(u_{n+1}) \equiv u_{n+1} - \phi(u_{n+1}) = 0,$$

on utilise les itérations suivantes :

$$u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{F'(u_{n+1}^k)} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{1 - \phi'(u_{n+1}^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dans les deux cas, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n+1}^k = u_{n+1}$.

Quelles méthodes sont implicites ?

A Euler Progressive

B Euler Retrograde

C Heun

D Crank Nicolson

E Point milieu

F BDF 2

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)) \right]$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}) \right]$$

$$\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n)$$

$$\frac{3f(x_{n+1})-4f(x_n)+f(x_{n-1}))}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

