Analyse Numérique SV

Équations différentielles ordinaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Exemples et motivations

Exemple

(Biologie) Considérons une population composée de y animaux dans un milieu ambiant où au plus B animaux peuvent coexister. On suppose qu'initialement la population soit de $y_0 \ll B$ et que le facteur de croissance des animaux soit égal à une constante C. Dans ce cas, l'évolution de la population au cours du temps sera proportionnelle au nombre d'animaux existants, sans toutefois que ce nombre ne dépasse la limite B. Cela peut s'exprimer à travers l'équation

$$y'(t) = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right), \quad t > 0, \qquad y(0) = y_0.$$

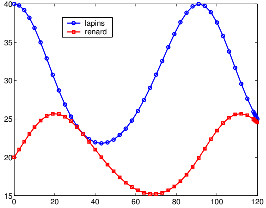
La résolution de cette équation permet de trouver l'évolution de la population au cours du temps.

MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA

On considère maintenant deux populations composées de y_1 et de y_2 individus, où y_1 est le nombre de proies et y_2 le nombre de prédateurs. L'évolution des deux populations est alors décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1'(t) = C_1 y_1(t)\left[1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)\right], \\ y_2'(t) = -C_2 y_2(t)\left[1 - b_2 y_2(t) - d_1 y_1(t)\right]. \end{cases} \tag{1}$$

- C_1 et C_2 sont les facteurs de croissance des deux populations,
- d_1 et d_2 tiennent compte de l'intéraction entre les deux populations,
- b_1 et b_2 sont liées à la nourriture disponible pour chaque population



Introduction

Soit $I = (t_0, T) \subset \mathbb{R}_+$ un intervalle, $f : \mathbb{R}_+ \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $y_0 \in \mathbb{R}$ donné. On cherche une fonction y,

$$\begin{aligned} y \ : \ & I \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto y(t) \end{aligned}$$

qui satisfait le problème suivant, appelé *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

où $y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$.

Exemples I

- Un problème de Cauchy peut être linéaire, comme par exemple :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } \ t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel $f(t, v) = 3v - 3t$ et dont la solution est
$y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3.$

- On peut aussi avoir des problèmes non-linéaires, comme :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} & \text{si } \ t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

avec $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$. Ce problème admet les trois solutions suivantes :
$y(t) = 0, \ \ y(t) = \sqrt{8t^3/27}, \ \ y(t) = -\sqrt{8t^3/27}.$

Exemples II

- Le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) & \text{si } \ t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet comme solution la fonction $y(t) = \tan(t)$ avec $0 < t < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire une solution locale.

Exemples III

- Même si un problème est linéaire, il peut être instable (numériquement mal posé).

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = C \end{cases} \tag{3}$$

La solution analytique de ce problème est $y(t) = (C - \frac{1}{3})e^{3t} + t + \frac{1}{3}$.

- Pour $C_1 = \frac{1}{3}$, on a donc $y_1(t) = t + \frac{1}{3}$.
- Pour $C_2 = \frac{1}{3} + \epsilon$, on a $y_2(t) = \epsilon e^{3t} + t + \frac{1}{3}$.

Une erreur de ϵ sur la donnée initiale se propage exponentiellement dans le temps. Par exemple, pour $\epsilon = 10^{-6}$ et $t = 10$, on a une erreur de l'ordre de 10^7.

Théorème (de Cauchy-Lipschitz, proposition 7.1 du livre)

Si la fonction $f(t,y)$ est

1. *continue par rapport à ses deux variables ;*
2. *lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive L (appelée constante de Lipschitz) telle que*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in I, \tag{4}$$

Alors la solution $y = y(t)$ du problème de Cauchy (2) existe, est unique et appartient à $C^1(I)$.

Si f est différentiable par rapport à y, on peut remplacer la deuxième condition par

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}, t\in I} \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| < \infty$$

Exemple

On considère le problème (5) et on vérifie qu'il admet une solution unique et globale.
Dans ce cas, $f(t,v) = 3v - 3t$ et on a :

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |3y_1 - 3t - (3y_2 - 3t)| = |3y_1 - 3y_2| \leq 3|y_1 - y_2|$$

et donc

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ \forall t > 0, \quad \text{avec} \quad L = 3.$$

Ainsi, f satisfait les hypothèses du théorème 1 et on peut affirmer que le problème (5) admet une solution globale et unique.

Méthodes des différences finies pour l'approximation du problème de Cauchy

Soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ une suite de nombres réels équirépartis et $h = t_{n+1} - t_n$ le pas de temps. On notera par :

$$u_n \quad \text{une approximation de} \quad y(t_n).$$

Dans le problème de Cauchy (2), pour $t = t_n$, on a

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)).$$

On veut alors approcher la dérivée $y'(t_n)$ au point t_n. Cela se fait en utilisant des schémas de **dérivation numérique**.

Schéma d'Euler explicite ou progressif

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Schéma d'Euler implicite ou rétrograde

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

La méthode de Heun :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h} = \dfrac{1}{2}\Big[f(t_n,u_n) + f\Big(t_{n+1}, u_n + hf(t_n,u_n)\Big)\Big] & \text{pour } n = 0,1,2\ldots,N_h-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{h} = \dfrac{1}{2}\Big[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\Big] & \text{pour } n = 0,1,2\ldots,N_h-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Schéma du point milieu

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n) & \text{pour } n = 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \quad \text{à déterminer} \end{cases}$$

BDF 2

$$\begin{cases} \dfrac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) & \text{pour } n = 1, 2 \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \quad \text{à déterminer} \end{cases}$$

Exemple

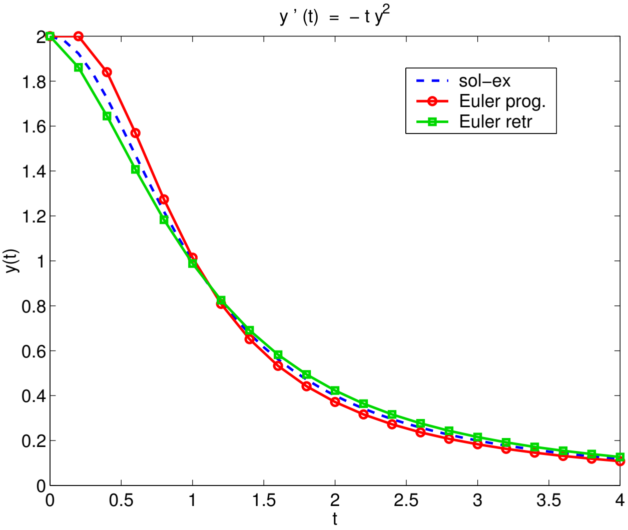
On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = -ty^2(t), & t > 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On veut résoudre cette équation avec les méthodes d'Euler progressive et Euler rétrograde, dans l'intervalle $[0, 4]$ avec $N_h = 20$ sous-intervalles, ce qui équivaut à un pas de temps $h = 0.2$ et donc à approcher la solution exacte $y(t_n)$ aux instants $t_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots 20$ (donc $t_n = 0.2, 0.4, 0.6, \ldots$) par une solution numérique u_n.

```
f = lambda t,x :   -t*x**2
y0 = 2; tspan=[0, 4]
Nh = 20
t_EP, y_EP = forwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
t_ER, y_ER = backwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
```

Comparaison entre la solution exacte et celles obtenues par les méthodes d'Euler progressive et rétrograde.



Explicite ou implicite

Remarque

- *Le schéma d'Euler progressif est un schéma explicite car il permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n explicitement :*

$$\text{(EP)} \qquad u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n).$$

- *Le schéma d'Euler rétrograde est un schéma implicite car u_{n+1} est défini implicitement en fonction de u_n :*

$$\text{(ER)} \qquad u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

En général, pour le schéma d'Euler rétrograde, il faut résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps.

Méthode du point fixe : Notons que (ER) est équivalent à un problème de point fixe avec

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}) = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

On peut résoudre ce problème grâce aux itérations suivantes

$$u_{n+1}^{k+1} = \phi(u_{n+1}^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Méthode de Newton : À partir de l'équation :

$$F(u_{n+1}) \equiv u_{n+1} - \phi(u_{n+1}) = 0,$$

on utilise les itérations suivantes :

$$u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{F'(u_{n+1}^k)} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{1 - \phi'(u_{n+1}^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dans les deux cas, on a $\lim_{k\to\infty} u_{n+1}^k = u_{n+1}$.

Quelles méthodes sont implicites ?

- **A** Euler Progressive $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_n, u_n)$
- **B** Euler Retrograde $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$
- **C** Heun $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(t_n, u_n) + f\Big(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)\Big)\right]$
- **D** Crank Nicolson $\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$
- **E** Point milieu $\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} = f(t_n, u_n)$
- **F** BDF 2 $\frac{3f(x_{n+1})-4f(x_n)+f(x_{n+1})}{2h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$