

# Analyse Numérique SV

## Équations différentielles ordinaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025



## Exemples et motivations

### Exemple

**(Biologie)** Considérons une population composée de  $y$  animaux dans un milieu ambiant où au plus  $B$  animaux peuvent coexister. On suppose qu'initialement la population soit de  $y_0 \ll B$  et que le facteur de croissance des animaux soit égal à une constante  $C$ . Dans ce cas, l'évolution de la population au cours du temps sera proportionnelle au nombre d'animaux existants, sans toutefois que ce nombre ne dépasse la limite  $B$ . Cela peut s'exprimer à travers l'équation

$$y'(t) = Cy(t) \left(1 - \frac{y(t)}{B}\right), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

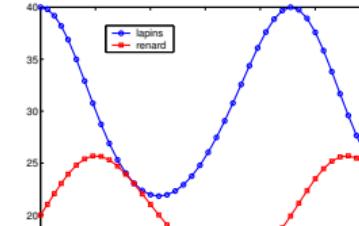
La résolution de cette équation permet de trouver l'évolution de la population au cours du temps.

## modèle de Lotka-Volterra

On considère maintenant deux populations composées de  $y_1$  et de  $y_2$  individus, où  $y_1$  est le nombre de proies et  $y_2$  le nombre de prédateurs. L'évolution des deux populations est alors décrite par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y'_1(t) = C_1 y_1(t) [1 - b_1 y_1(t) - d_2 y_2(t)], \\ y'_2(t) = -C_2 y_2(t) [1 - b_2 y_2(t) - d_1 y_1(t)]. \end{cases} \quad (1)$$

- $C_1$  et  $C_2$  sont les facteurs de croissance des deux populations,
- $d_1$  et  $d_2$  tiennent compte de l'interaction entre les deux populations,
- $b_1$  et  $b_2$  sont liées à la nourriture disponible pour chaque population



# Introduction

Soit  $I = (t_0, T) \subset \mathbb{R}_+$  un intervalle,  $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction continue et  $y_0 \in \mathbb{R}$  donné. On cherche une fonction  $y$ ,

$$\begin{aligned} y &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned}$$

qui satisfait le problème suivant, appelé *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

où  $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ .

# Exemples I

- Un problème de Cauchy peut être linéaire, comme par exemple :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel  $f(t, x) = 3x - 3t$  et dont la solution est  
 $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$ .

- On peut aussi avoir des problèmes non-linéaires, comme :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

avec  $f(t, x) = \sqrt[3]{x}$ . Ce problème admet les trois solutions suivantes :  
 $y(t) = 0$ ,  $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$ ,  $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$ .

## Exemples II

- Le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t) & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet comme solution la fonction  $y(t) = \tan(t)$  avec  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire une **solution locale**.

## Exemples III

- Même si un problème est linéaire, il peut être instable (numériquement mal posé).

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & \text{si } t > 0 \\ y(0) = C \end{cases}$$

La solution analytique de ce problème est  $y(t) = (C - \frac{1}{3})e^{3t} + t + \frac{1}{3}$ .

- Pour  $C_1 = \frac{1}{3}$ , on a donc  $y_1(t) = t + \frac{1}{3}$ .
- Pour  $C_2 = \frac{1}{3} + \epsilon$ , on a  $y_2(t) = \epsilon e^{3t} + t + \frac{1}{3}$ .

Une erreur de  $\epsilon$  sur la donnée initiale se propage exponentiellement dans le temps. Par exemple, pour  $\epsilon = 10^{-6}$  et  $t = 10$ , on a une erreur de l'ordre de  $10^7$ .

# Théorème de Cauchy-Lipschitz, simplifié

Théorème (de Cauchy-Lipschitz, proposition 7.1 du livre)

*Si la fonction  $f(t, x)$  est*

- 1. Continue par rapport à ses deux variables ;*
- 2. La dérivée partielle par rapport à  $x$  existe et est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive  $\lambda_{\max}$  telle que*

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| < \lambda_{\max} \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in I$$

*Alors la solution  $y(t)$  du problème de Cauchy existe, est unique et appartient à  $C^1(I)$ .*

## Exemple

On considère le problème (5) et on vérifie qu'il admet une solution unique et globale :

Dans ce cas,  $f(t, x) = 3x - 3t$ .  $f$  est continue et la dérivée partielle en  $x$  est

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = 3$$

Ici on peut poser  $\lambda_{\max} = 3$ . Ainsi,  $f$  satisfait les hypothèses du théorème 1 et on peut affirmer que le problème (5) admet une solution globale et unique.

# Perturbations I

Que se passe-t-il en cas de perturbations du problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & \text{si } t \in I \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = f(t, z(t)) & \text{si } t \in I \\ z(0) = y_0 + \rho \end{cases}$$

pour un  $\rho \in \mathbb{R}$  petit?

On considère l'erreur  $e(t) = z(t) - y(t)$ . Alors  $e(0) = \rho$  et, par Taylor, on obtient

$$\dot{e}(t) = f(t, z(t)) - f(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, \eta(t))}{\partial x} (z(t) - y(t)) = \frac{\partial f(t, \eta(t))}{\partial x} e(t)$$

Par exemple, si  $f(t, x) = \lambda x + b(t)$ , alors  $\dot{e}(t) = \lambda e(t)$ , dont la solution est  $e(t) = \rho e^{\lambda t}$ .

## Perturbations II

Si  $\lambda = 0$ , l'erreur  $e(t)$  du à la perturbation  $\rho$  est constant.

Si  $\lambda > 0$ , alors  $e(t)$  est croissant de manière exponentielle.

Si  $\lambda < 0$ , alors  $e(t)$  est decroissant de manière exponentielle. On dit que la solution analytique du problème de Cauchy est stable par rapport au perturbations.

Nous sommes intéressé au cas où la solution analytique est **unique** et **stable par rapport aux perturbations**. Ceci est le cas s'ils existent  $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_{\min}$  positifs tels que

$$-\lambda_{\max} \leq \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \leq -\lambda_{\min} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall t \in I$$

# Méthodes des différences finies pour l'approximation du problème de Cauchy

Soient  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$  une suite de nombres réels équirépartis et  $h = t_{n+1} - t_n$  le pas de temps. On notera par :

$u_n$     une approximation de     $y(t_n)$ .

Dans le problème de Cauchy (2), pour  $t = t_n$ , on a

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n)).$$

On veut alors approcher la dérivée  $y'(t_n)$  au point  $t_n$ . Cela se fait en utilisant des schémas de **dérivation numérique**.

## Schéma d'Euler explicite ou progressif

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(\textcolor{blue}{t}_n, u_n) & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

## Schéma d'Euler implicite ou rétrograde

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(\textcolor{blue}{t}_{n+1}, u_{n+1}) & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

## La méthode de Heun :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[ f(\textcolor{blue}{t}_n, \textcolor{blue}{u}_n) + f(\textcolor{blue}{t}_{n+1}, u_n + h f(t_n, u_n)) \right] & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

## Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[ f(\textcolor{blue}{t}_n, \textcolor{blue}{u}_n) + f(\textcolor{blue}{t}_{n+1}, u_{n+1}) \right] & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

## Schéma du point milieu

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = f(\textcolor{blue}{t}_n, u_n) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \quad \text{à déterminer} \end{array} \right.$$

## BDF 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} = f(\textcolor{blue}{t}_{n+1}, u_{n+1}) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 \quad \text{à déterminer} \end{array} \right.$$

## Exemple

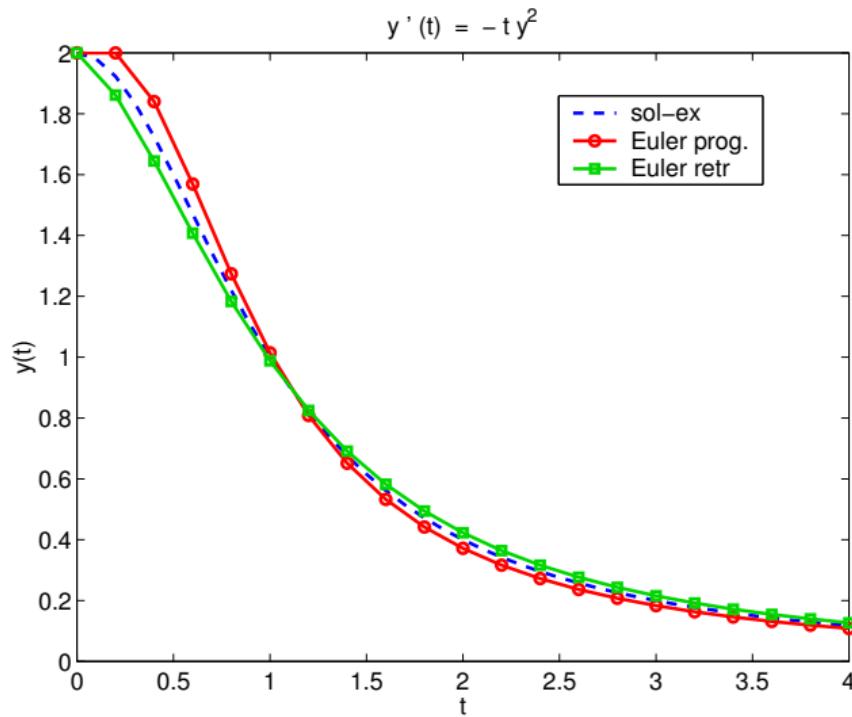
On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = -ty^2(t), & t > 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On veut résoudre cette équation avec les méthodes d'Euler progressive et Euler rétrograde, dans l'intervalle  $[0, 4]$  avec  $N_h = 20$  sous-intervalles, ce qui équivaut à un pas de temps  $h = 0.2$  et donc à approcher la solution exacte  $y(t_n)$  aux instants  $t_n = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, 20$  (donc  $t_n = 0.2, 0.4, 0.6, \dots$ ) par une solution numérique  $u_n$ .

```
f = lambda t,x : -t*x**2
y0 = 2; tspan=[0, 4]
Nh = 20
t_EP, y_EP = forwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
t_ER, y_ER = backwardEuler(f, tspan, y0, Nh)
```

Comparaison entre la solution exacte et celles obtenues par les méthodes d'Euler progressive et rétrograde.



# Explicite ou implicite

## Remarque

- Le schéma d'Euler progressif est un *schéma explicite* car il permet de calculer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  explicitement :

$$(EP) \quad u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n).$$

- Le schéma d'Euler rétrograde est un *schéma implicite* car  $u_{n+1}$  est défini implicitement en fonction de  $u_n$  :

$$(ER) \quad u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

En général, pour le schéma d'Euler rétrograde, il faut résoudre une équation non-linéaire à chaque pas de temps.

**Méthode du point fixe :** Notons que (ER) est équivalent à un problème de point fixe avec

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}) = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

On peut résoudre ce problème grâce aux itérations suivantes

$$u_{n+1}^{k+1} = \phi(u_{n+1}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Méthode de Newton :** À partir de l'équation :

$$F(u_{n+1}) \equiv u_{n+1} - \phi(u_{n+1}) = 0,$$

on utilise les itérations suivantes :

$$u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{F'(u_{n+1}^k)} = u_{n+1}^k - \frac{F(u_{n+1}^k)}{1 - \phi'(u_{n+1}^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dans les deux cas, on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n+1}^k = u_{n+1}$ .

## Quelles méthodes sont implicites ?

**A** Euler Progressive

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(\mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n)$$

**B** Euler Retrograde

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(\mathbf{t}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})$$

**C** Heun

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[ f(\mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n) + f\left(\mathbf{t}_{n+1}, \mathbf{u}_n + h f(\mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n)\right) \right]$$

**D** Crank Nicolson

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2} \left[ f(\mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n) + f(\mathbf{t}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) \right]$$

**E** Point milieu

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = f(\mathbf{t}_n, \mathbf{u}_n)$$

**F** BDF 2

$$\frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} = f(\mathbf{t}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})$$