Analyse Numérique SV

Dérivation numérique

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Dérivée numérique

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et $x_0 \in [a, b]$. La dérivée $f'(x_o)$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.
\end{aligned}
$$

Soient $x_0 \in [a, b]$, (Dy) une approximation de $f'(x_0)$ et (D^2y) une approximation de $f''(x_0)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)^P = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)^R = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \tag{2}$$

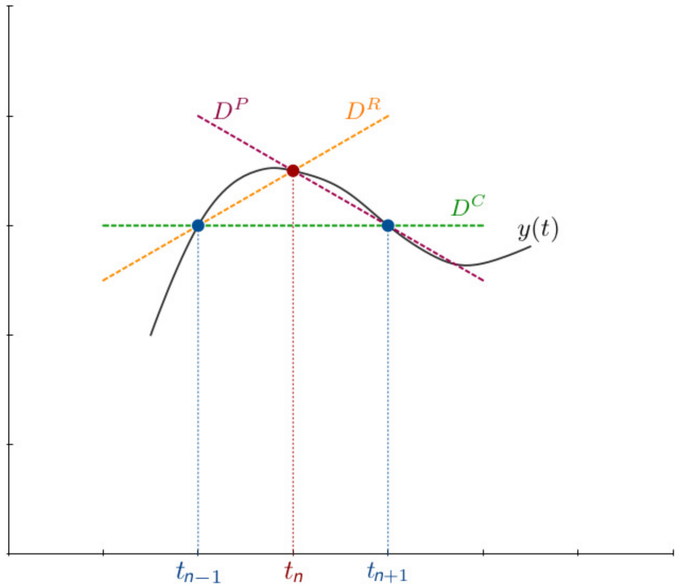
- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)^C = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \tag{3}$$

- **différence finie centrée d'ordre 2** l'approximation

$$(D^2y)^C = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \tag{4}$$

Graphiquement



Erreur de troncature

Définition

La différence $|f'(x_0) - (Dy)^P|$ (et celles correspondant aux autres différences finies) est appelée erreur de troncature au point t_n. On dira qu'elle est d'ordre $p > 0$ si on a

$$|f'(x_0) - (Dy)^P| \leq Ch^p,$$

pour une constante $C > 0$.

Les estimations trouvées permettent d'affirmer que

- les erreurs de troncature des différences finies progressive et rétrograde sont d'ordre 1 ;
- l'erreur de troncature de la différence finie centrée est d'ordre 2.

À ne pas confondre : Ordre de la dérivée et ordre de troncature.

Erreur de troncature, $(Dy)^P$

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$, alors il existe un ξ entre x_0 et x tel qu'on a le développement de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2. \tag{5}$$

- Pour $x = x_0 + h$ dans (5), on obtient

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

donc la différence finie progressive est donnée par

$$(Dy)_n^P = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2}f''(\xi).$$

En particulier,

$$|f'(x_0) - (Dy)_n^P| \leq Ch, \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{2}\max_{x \in [x_0, x_0 + h]} |f''(x)|.$$

- Pour $x = x_0 - h$ dans (5), on obtient

$$f(x_0 - h) - f(x_0) = f'(x_0)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

donc la différence finie rétrograde est donnée par

$$(Dy)^R = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) - \frac{h}{2} f''(\xi).$$

En particulier,

$$|f'(x_0) - (Dy)^R| \leq Ch,$$

où $C = \frac{1}{2} \max_{x \in [x_0 - h, x_0]} |f''(x)|$.

- Pour $t = x_0 + h$ et $t = x_0 - h$ avec un développement d'ordre 2 (si $y \in C^3(\mathbb{R})$)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)}{2}\, h^2 + \frac{f'''(\xi_+)}{6}\, h^3,$$
$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)}{2}\, h^2 - \frac{f'''(\xi_-)}{6}\, h^3,$$

on obtient

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2f'(x_0)h + \frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{6}\, h^3,$$

d'où

$$(Dy)^C = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{12}\, h^2.$$

On a donc l'estimation suivante

$$|f'(x_0) - (Dy)^C| \leq Ch^2,$$

où $C = \frac{1}{6} \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |f'''(x)|$.