Analyse Numérique SV

Dérivation numérique

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Dérivée numérique

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dans C^1, $x_0 \in [a,b]$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$x_0 \in [a,b]$, (Dy) une approximation de $f'(x_0)$, $(D^2y) \approx f''(x_0)$

- différence finie progressive : pour h fixé (pos $\cancel{>}$ 0)

$$(Dy)^P = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- diff. finie rétrograde : h fixe,

$$(Dy)^R = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

- diff. finie centrée : h fixe

$$(Dy)^C = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

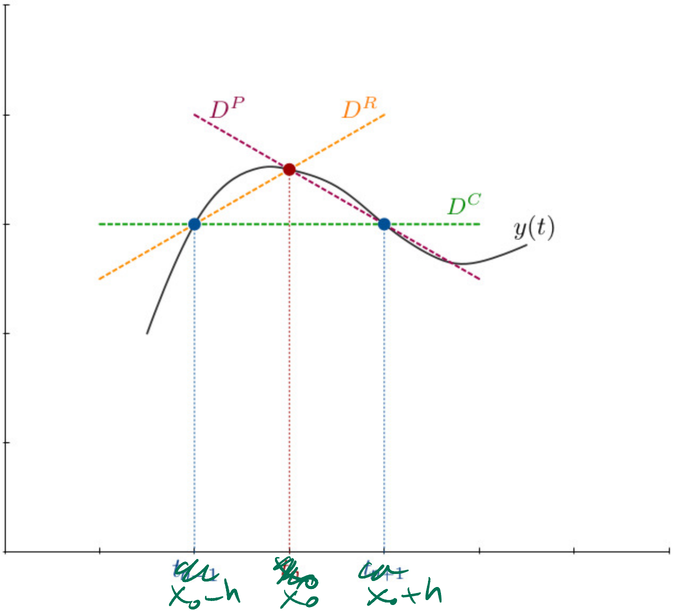
approx de $f'(x_0)$

- diff. finie centrée d'ordre 2 : h fixé

$$(D^2y)^C = \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

approx. de $f''(x_0)$

Graphiquement



Erreur de troncature

Définition La quantité $|f'(x_0) - (Dy)|$ est appelée erreur de troncature en x_0. On dit qu'elle est d'ordre $p>0$ si

$$|f'(x_0) - (Dy)| \leq C h^p \quad \text{où} \quad C>0$$

L'erreur de troncature des différences finies progressive et rétrograde sont d'ordre 1

— // — de la différence finie centrée est d'ordre 2

Erreur de troncature, $(Dy)^P$

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$, alors il existe un ξ entre x_0 et x tel qu'on a le développement de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2. \qquad (1)$$

- Pour $x = x_0 + h$ dans (1), on obtient

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

donc la différence finie progressive est donnée par

$$(Dy)^P_n = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2}f''(\xi).$$

En particulier,

$$|f'(x_0) - (Dy)^P_n| \leq Ch, \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{2}\max_{x \in [x_0, x_0+h]}|f''(x)|.$$

$x_0 + H$

- Pour $x = x_0 - h$ dans (1), on obtient

$$f(x_0 - h) - f(x_0) = f'(x_0)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

donc la différence finie rétrograde est donnée par

$$(Dy)^R = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) - \frac{h}{2} f''(\xi).$$

En particulier,

$$|f'(x_0) - (Dy)^R| \leq Ch,$$

où $C = \frac{1}{2} \max_{\cancel{x \in [x_0 - h, x_0]}} |f''(x)|$.

$x \in [x_0 - H, x_0]$