Analyse Numérique SV

Dérivation numérique

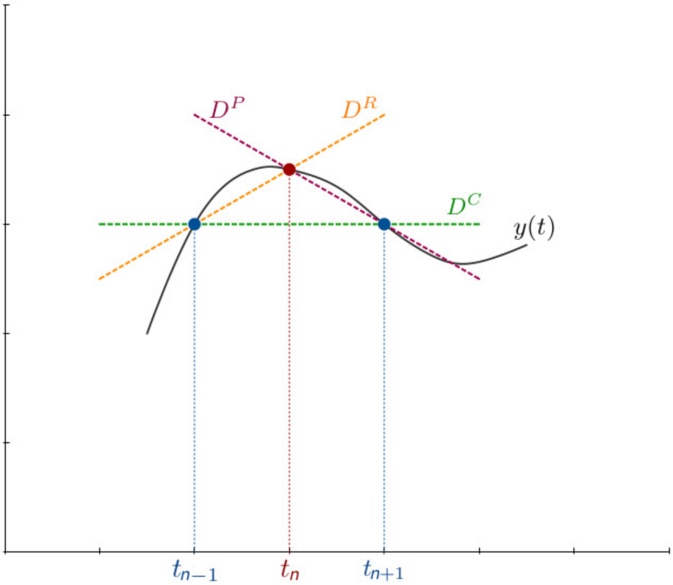
Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Dérivée numérique

Graphiquement



Erreur de troncature

Erreur de troncature, $(Dy)^P$

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$, alors il existe un ξ entre x_0 et x tel qu'on a le développement de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2. \tag{1}$$

- Pour $x = x_0 + h$ dans (1), on obtient

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

donc la différence finie progressive est donnée par

$$(Dy)_n^P = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2}f''(\xi).$$

En particulier,

$$|f'(x_0) - (Dy)_n^P| \leq Ch, \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{2} \max_{x \in [x_0, x_0 + h]} |f''(x)|.$$

- Pour $x = x_0 - h$ dans (1), on obtient

$$f(x_0 - h) - f(x_0) = f'(x_0)(-h) + \frac{f''(\xi)}{2}(-h)^2,$$

donc la différence finie rétrograde est donnée par

$$(Dy)^R = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) - \frac{h}{2} f''(\xi).$$

En particulier,

$$|f'(x_0) - (Dy)^R| \leq Ch,$$

où $C = \frac{1}{2} \max_{x \in [x_0 - h, x_0]} |f''(x)|$.